# *¿Qué es la Inferencia Matemática?*

## I) *El Gran Mito Realista*

Como en relación con cualquier otro caso de actividad o de disciplina humanas, las matemáticas nos presentan con el tradicional problema de tener que distinguir entre la práctica y la comprensión de dicha práctica. Lo primero no acarrea consigo de manera automática lo segundo. En este como en muchas otros casos, parte del problema consiste en que si bien los matemáticos disponen de la sólida plataforma del conocimiento matemático carecen del entrenamiento que permite dar cuenta de él, en tanto que los filósofos, si bien entrenados en el arte de ordenar pensamientos y capacitados para en principio desarrollar dicha labor, carecen a menudo de conocimientos sólidos en matemáticas, por la obvia razón de que en general no es matemáticas lo que estudiaron. Naturalmente, una situación así redunda en demérito de la filosofía de las matemáticas. Es cierto que siempre ha habido excepciones a esto que parece una regla general. Pitágoras, Platón, Leibniz, Frege, Husserl, Russell, Quine (por no citar más que a unos cuantos) son buenos ejemplos de feliz síntesis de matemáticas con filosofía, pero es evidente que los filósofos matemáticos grandes son más bien escasos. Parecería que lo problemático de la situación consiste no sólo en que dar cuenta de manera filosóficamente convincente de las matemáticas exige formarse simultáneamente en dos áreas completamente diferentes, sino también que requiere fundir en una sola dos mentalidades radicalmente distintas. Wittgenstein, se sabe, tenía una muy pobre opinión de los matemáticos filósofos: “En filosofía no se puede *interrumpir* una enfermedad de pensamiento. Debe ésta seguir su curso natural y la curación *lenta* es lo más importante. (Es por eso que los matemáticos son tan malos filósofos).”[1] No debería, pues, sorprendernos que fueran los mismos matemáticos en sus momentos filosóficos quienes, en su afán de aclaración de la naturaleza de su disciplina (sobre qué versa, cómo está constituida, en qué se funda, cómo se opera en ella, etc.), hubieran echado a rodar la multitud de mitos filosóficos en los que ahora está hundida la reflexión sobre las matemáticas. Kurt Gödel, podría argumentarse, es un buen ejemplo de ello. Es justamente en contra de ideas como la de que hay profundos problemas ontológicos en matemáticas, que los matemáticos son exploradores de un universo infinito de entidades abstractas, que hay hechos matemáticos, los cuales se caracterizan por determinados rasgos o propiedades, etc., que se sublevó Wittgenstein. En este ensayo me ocuparé de una porción mínima del inmenso terreno abarcado por su pensamiento, es decir, presentaré exclusivamente algunas de sus ideas en relación

[1] L. Wittgenstein, *Zettel* (Oxford: Basil Blackwell, 1967, sec. 382.

con lo que son la inferencia y la experiencia matemáticas. Ahora bien, para estar en mejor posición de apreciar y evaluar la posición que Wittgenstein se fue labrando habremos primero de presentar, aunque sea en sus grandes lineamientos, los mitos de filosofía de las matemáticas que quedan englobados bajo el rubro general de "realismo". Es sólo una vez desglosadas las creencias fundamentales de la interpretación realista de las matemáticas que podremos abocarnos a reconstruir y exponer los puntos de vista de Wittgenstein en relación con nuestro tema.

'Realismo' en filosofía de las matemáticas apunta a un conglomerado de tesis de las cuales sus partidarios enfatizan las que más les convengan según sus necesidades del momento. La lista de ellas que a continuación presento, y que ni mucho menos pretende ser exhaustiva, se conforma sin embargo de tesis que parecerían ser esenciales al realismo. Podemos agruparlas en dos grandes bloques, uno concerniente a la naturaleza de las proposiciones matemáticas y otro referente más bien a cuestiones de orden epistemológico. Así, tenemos que para el realista común las proposiciones matemáticas:

> a) son verdaderas o falsas en exactamente el mismo sentido en que pueden serlo las del lenguaje común, las de historia o las de cualquier ciencia natural, *e.g.*, la física o la biología
> b) vale para ellas el Principio del Tercero Excluido de manera irrestricta
> c) son verdaderas en virtud de algo externo a ellas
> d) describen rasgos necesarios de la realidad
> e) versan sobre objetos abstractos (puntos, números, espacios, etc.), tan reales como los osos o las radiaciones
> f) son *a priori* y verdaderas (o falsas) en todo mundo posible, es decir, son necesariamente verdaderas. (La determinación de si son analíticas o no es otro debate, aunque a primera vista al menos lo más congruente para el realista sería defender la idea de que no lo son).

Por otra parte, podemos decir del matemático que:

> g) es ante todo un explorador de un universo particular y un descubridor de hechos de ese mundo. El matemático identifica y reconoce conexiones objetivas, totalmente independientes de su voluntad, gusto, etc.
> h) su enunciación de verdades (matemáticas) presupone la realidad y el funcionamiento de facultades cognitivas especiales (*i.e.*, no sensoriales)

Es probable que un realista ambicioso y congruente defendiera todas las tesis mencionadas, pero es claro que diversos pensadores de esta tendencia han optado más bien por enfatizar una u otra en función, como dije, de los problemas que en el momento de su reflexión estén enfrentando. M. Dummett, por ejemplo, ha insistido en la importancia de (b), en tanto que filósofos matemáticos como H. Poincaré o matemáticos como G. H. Hardy han resaltado más bien (g) y (h). Por su parte, Platón y Frege subrayan más bien (c), (d) y (e). Como puede apreciarse, hay de todo, pero en todo caso una cosa es clara: son todas estas tesis (entre muchas otras) que Wittgenstein va a someter a una devastadora crítica. Antes de reconstruir sus argumentos, sin embargo, será útil hacer una presentación un poco más precisa de la perspectiva realista de los tópicos que aquí nos incumben, esto es, la inferencia y la experiencia matemáticas.

## II) *Realismo, inferencia y experiencia*

Es relativamente claro que lo que los realistas tienen que decir en torno a la inferencia matemática es ante todo el resultado de una interpretación, o por lo menos lógicamente parte de ella. Dicha interpretación se funda básicamente en un paralelismo o analogía, bastante poco sofisticado dicho sea de paso. La idea motriz parece ser la de que así como hay experiencia sensorial hay también lo que podría llamarse 'experiencia matemática', esto es, una experiencia puramente intelectual, y al igual que hay órganos para las experiencias sensoriales la experiencia matemática también tendría su órgano, *viz*., la mente. Ahora bien, una diferencia importante entre estas dos clases de experiencias es que en el caso de las sensoriales sólo podemos establecer conexiones probables, en tanto que en el de las experiencias matemáticas las conexiones que establecemos son necesarias. El matemático "ve" (con el "ojo de la mente") que ciertas conexiones (entre números, por ejemplo) se dan y que ciertas proposiciones "se siguen" objetivamente de otras. Esto puede ilustrarse de manera sencilla por medio de teorías como las de geometría o de teorías axiomatizadas de números: partiendo de ciertos supuestos o axiomas o hipótesis, se deducen teoremas, esto es, consecuencias lógicas de ellos por medio de reglas de razonamiento que se asume que son objetivamente válidas. En otros casos, lo que se tiene son ciertas fórmulas (*e.g.*, para resolver ecuaciones de diverso grado) y el matemático "ve" cómo la fórmula en cuestión nos permite resolver la ecuación de que se trate. Así vistas las cosas, queda relativamente claro que lo que se debe hacer, **si lo que se quiere es razonar correctamente**, es usar o aplicar las fórmulas tal como a todas luces ellas mismas nos indican cómo hacerlo. O sea, de acuerdo con el realista no hay más que **una** manera de leerlas. Es por eso que se dice que, cuando efectivamente se les aprehende, el resultado ya estaba "predeterminado". No hay más que una forma objetivamente correcta de aplicar las fórmulas y, en general, de extraer conclusiones. O sea, no es que una vez alcanzado un cierto resultado éste se vuelva definitivo, sino que ya lo era desde antes de ser descubierto. Puede, pues, decirse que, en la medida en que para establecerlas no fue necesario recurrir a la experiencia sensorial sino sólo a una puramente intelectual, las proposiciones matemáticas son no sólo necesarias sino *a priori*. Inferir es precisamente el proceso mental de descubrimiento o de reconocimiento de conexiones abstractas objetivas.

El cuadro realista global es, como puede apreciarse, complejo y rico en insinuaciones, sugerencias e implicaciones. Ahora bien, en la primera parte de sus *Observaciones sobre los Fundamentos de las Matemáticas*, Wittgenstein se enfrenta a él con el claro propósito de desmantelarlo. Concentrándonos exclusivamente en la cuestión de la inferencia lógica, es de dicho esfuerzo que ahora pasaré a ocuparme.

## III) *La Naturaleza de la Inferencia Matemática*

Como era de esperarse, la inmensa labor de aclaración desarrollada por Wittgenstein en el área de la filosofía de las matemáticas tenía que incluir un capítulo dedicado a la inferencia matemática. Todo mundo entiende, por otra parte, que ni el peculiar estilo de Wittgenstein ni su muy especial forma de abordar y lidiar con los enredos de pensamiento permitirían presentar sus logros a la manera de un sistema deductivo. Al reconstruir el pensamiento de Wittgenstein inevitablemente lo mutilamos. Wittgenstein va abordando de manera libre las dificultades que su tratamiento del tema de manera natural le va planteando y es sólo poco a poco que se entiende cómo a través de su disquisición se va tejiendo una nueva concepción del asunto. Así, pues, más que intentar sistematizar sus resultados lo que conviene es entender su enfoque y su método de trabajo.

A este respecto, lo primero que tenemos que recordar es que la aclaración filosófica no es ella misma un cálculo más. O sea, las dificultades de comprensión que plantean las transiciones matemáticas no son un asunto más de números y no son quienes las efectúan los más apropiados para dar cuenta de ellas. Lo que tenemos que examinar es lo que los matemáticos **dicen** acerca de su propio trabajo. Ahora bien, eso que ellos dicen y que es nuestro material de trabajo, es decir, las descripciones que ellos ofrecen de lo que hacen, forzosamente lo enuncian en el lenguaje natural, esto es, por medio de expresiones que son del dominio público. Son, pues, los conceptos por así llamarlos ‘naturales’ lo que primeramente debemos examinar. De seguro que los egipcios o los aztecas razonaban, por más que no dispusieran de cálculos lógicos. “Y ¿en qué consiste la actividad especial de inferir? – Es por ello que es necesario que examinemos cómo efectuamos inferencias en la praxis del lenguaje; qué clase de procedimiento en el juego de lenguaje es la inferencia".[2] O sea, el concepto de inferencia no es un concepto matemático o construido primeramente por o para los matemáticos, como lo es por ejemplo el de número irracional, sino un concepto que emana del lenguaje natural y que los matemáticos se apropian para describir lo que hacen. Pero es precisamente a través de esa apropiación que se cuela la interpretación errada y, por consiguiente, que se generan las incomprensiones de las cuales no podemos después librarnos.

Wittgenstein inicia su examen tratando de esclarecer lo que se quiere decir cuando se habla de "determinación" en el contexto de las matemáticas. Se dice, por ejemplo, que una fórmula "determina" un resultado, que ciertos axiomas y ciertas reglas de inferencia "determinan" los teoremas que se pueden obtener (*i.e.*, esos y no otros son los que se siguen), etc. Pero ¿qué significa 'determinar' cuando se le emplea en matemáticas? ¿Qué es la determinación (o la predeterminación) matemática? Lo primero que salta a la vista es que el uso de 'predeterminar' por parte de los matemáticos o de los filósofos de las matemáticas es, como era quizá de esperarse, un uso básicamente analógico. La prueba de ello es que no se le usa en el sentido literal o estricto en el que se usa en el discurso usual. En el sentido usual, decir que lo que alguien escribe está determinado, por ejemplo, por lo que otra persona dice o hace, podría querer decir, entre otras cosas, que la persona en cuestión:

a) le da las respuestas al alumno pero en clave, de manera que éste tiene primero que descifrar un texto para llegar a ellas
b) escribe las respuestas en el papel sólo que de manera muy tenue de manera que el otro tenga que fijarse y recalcar lo escrito
c) le dicta (o, en general, le ordena) al alumno lo que tiene que escribir
d) lo fuerza a que escriba ciertos resultados (podemos imaginar a un dictador que proporciona los resultados a los que quiere que sus científicos lleguen).[3]
e) lo amenaza de modo que el alumno u oyente escribe precisamente lo que la otra persona quiere.

Eso y cosas parecidas es "determinar" algo para alguien. En todos esos casos, y otros que podríamos imaginar, tiene un sentido claro afirmar que los resultados ya estaban predeterminados para el alumno: si el dictador ya sabía a qué resultados se tenía que llegar, los resultados ya estaban predeterminados. El asunto es claro. Pero es también evidente que **no** es en ese sentido literal como en general se usa el término 'predeterminar' en el contexto de las matemáticas. En el caso de las

[2] L. Wittgenstein, *Remarks on the Foundations of Mathematics* (Cambridge/London: The M.I.T. Press, 1975), Parte I, sec. 17, p. 8.
[3] Véase *ibid*., Parte I, sec. 22, pp. 9-10.

operaciones matemáticas lo que se hace es algo sutilmente parecido, pero de todos modos diferente, a saber, se entrena a alguien para que aprenda a producir diversos resultados aplicando de cierto modo las reglas y fórmulas que se le proporcionan. Lo interesante y sorprendente es que, en general y en condiciones normales todos aplicamos las fórmulas o reglas de la misma manera. Por consiguiente, no es particularmente sorprendente que coincidamos en los resultados. Ahora bien, es esa concordancia lo que nos lleva a afirmar que el resultado tenía ya que haber estado allí, esperando, predeterminado. "Si, por lo tanto, nosotros determinamos estas transiciones en un sentido por completo diferente, a saber, sometiendo a nuestro alumno a un entrenamiento como, *e.g.*, el que reciben los niños con las tablas de multiplicar y la multiplicación, de manera que todos aquellos que son así entrenados hacen del mismo modo multiplicaciones al azar (multiplicaciones que no se hayan hecho mientras eran entrenados) y con resultados en los que todos concuerdan (...), entonces nos resultará natural usar lo siguiente como una imagen de la situación: los pasos ya estaban dados y simplemente los está escribiendo".[4] Pero en lo que los realistas no reparan es en el hecho de que la aceptación de resultados es ante todo la expresión de un entrenamiento colectivo exitoso previo para operar con signos de determinada manera.

Así, pues, hablar de que en matemáticas los resultados están "predeterminados", esto es, dados previamente a las operaciones, es hablar metafóricamente o, mejor dicho, construir una imagen. Ahora bien, en sí mismo ni mucho menos es el recurso a una imagen un procedimiento ilegítimo, siempre y cuando no olvidemos que la imagen resulta más bien de una interpretación. El problema surge cuando se pretende tomar la imagen (interpretación) por una descripción. De ahí que si lo que queremos es comprender realmente qué pasa cuando trazamos inferencias, lo que para empezar tenemos que hacer es desprendernos de dicha imagen y describir lo más exactamente posible lo que realmente hacemos cuando inferimos. O sea, el error generalizado consiste en pensar que se describe un proceso cuando es una imagen lo que nos guía en nuestra supuesta descripción. Nuestro objetivo debe ser más bien describir nuestro proceder de manera neutral, sin prejuzgar la cuestión, es decir, sin dejar que las imágenes en circulación se nos impongan y nos hagan encarar y comprender el tema a través de ellas.

Como puede apreciarse, el paralelismo entre la estrategia argumentativa de las *Remarks on the Foundations of Mathematics* y la de las *Philosophical Investigations* es notable. Por ejemplo, en las *Investigaciones* Wittgenstein hace ver cuando queremos aclarar lo que significa una palabra recurrimos a la expresión 'La

[4] L. Wittgenstein, *ibid*., Parte I, sec. 22, pp. 9-10.

palabra ... significa ...'. Pero lo cierto es que decir eso no es todavía decir nada, aparte de que es engañoso, puesto que sugiere equívocamente que el significado de '*x*' es el objeto o la cosa X. Pero la misma forma de palabras aparecerá independientemente de la clase de signo que esté en juego: 'tendencia', 'π', 'hiena', átomo', etc. O sea, siempre recurrimos a la formulación canónica, independientemente de la clase de significado que esté involucrada. "En otras palabras, la descripción deberá revestir la forma: 'La palabra ... significa ...".[5] Sin embargo, cuál sea el significado específico del término '*x*' es algo que sólo la descripción del uso concreto que de él se hace podrá proporcionar y los usos, claro está, no son adivinables. Si queremos determinar el significado de una expresión, por lo tanto, tenemos que atender a las **aplicaciones** que de ella se hagan. De igual manera, decir que la fórmula predetermina el resultado no es todavía decir nada preciso: no es más recurrir al esquema que nos dice qué forma debe revestir la explicación de lo que es en el área de las matemáticas explicar que se obtuvo un resultado. O sea, cuando se le explica a alguien lo que es una inferencia correcta se le hacen las aclaraciones pertinentes y se le dice que "el resultado ya estaba predeterminado por la fórmula", o por las premisas. Pero, una vez más, decir eso no es todavía explicar nada: es simplemente dar la forma canónica de explicación en este contexto particular. Nosotros entenderemos por qué decimos que el resultado estaba de antemano determinado cuando efectivamente comprendamos lo que hacemos cuando inferimos, pero no simplemente porque expresemos nuestra creencia de que el resultado estaba ya allí aguardándonos, puesto que esto último es simplemente aplicar la imagen que se está cuestionando.

Describamos, pues, qué es lo que hacemos cuando inferimos algo. Consideremos una prueba. En una prueba, lo que hacemos es "extraer" una conclusión a partir de ciertas premisas.[6] Una inferencia es más bien una transición, pero una transición no es un fenómeno inexplicable o esotérico. Lo que llamamos 'transición' no es mas que una secuencia de proposiciones o de oraciones que tiene como característica el que digamos que la última es la conclusión de las anteriores. "Una prueba – podría decir – es *un* esquema, en uno de cuyos extremos están escritas ciertas proposiciones y en el otro una oración (a la que llamamos 'proposición demostrada')".[7] En otras palabras, considerada neutralmente una prueba no es más que una secuencia o lista ordenada de expresiones (proposiciones o fórmulas). Una característica de una demostración es que en ella empleamos expresiones como 'y por lo tanto', 'se sigue que', etc., por medio de las cuales

[5] L. Wittgenstein, *Philosophical Investigations* (Oxford: Basil Blackwell, 1974), sec. 10.
[6] Obviamente, el verbo 'extraer' ya prejuzga el asunto: nos induce a pensar que algo ya estaba allí de alguna manera metido y que nuestra tarea consiste en sacarlo a la luz. Esto ya es una interpretación de lo que hacemos, una interpretación que neutralizamos si entendemos lo que sucede.
[7] L. Wittgenstein, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, Parte I, sec. 28, p. 11.

vinculamos a la última proposición con las anteriores. La expresión 'y por lo tanto' indica un uso especial del esquema. Frases así son simplemente la expresión de la aceptación del esquema completo, es decir, del todo formado por premisas y conclusión. Esto exige algunas aclaraciones.

Supóngase que lo que se quiere es resolver una ecuación de segundo grado. Se requiere utilizar una fórmula particular. Pero ¿cómo podría una secuencia de signos por sí sola forzar a alguien, a una persona, a hacer algo, esto es, a proceder de una u otra manera? O, mejor dicho: ¿cómo podría un esquema forzar a todo mundo a proceder de tal o cual modo? El esquema por sí solo no dice nada, es decir, no indica cómo tiene que ser aplicado. Es el hecho de que concordemos en nuestro uso del signo lo que constituye nuestro peculiar modo de empleo de dicha fórmula. O sea, lo que nos enseñamos unos a otros es a **usar** dicho esquema de determinada manera y de esa manera solamente. Al hacerlo y al privilegiar una aplicación particular, excluimos o prohibimos todas las potenciales formas de utilización alternativas. De hecho, como Wittgenstein se esfuerza por hacernos entender, múltiples otras aplicaciones de uno y el mismo esquema son imaginables, inclusive en los casos más elementales, pero precisamente por ello los procedimientos ya establecidos nos parecerán incuestionables, los objetivamente correctos. Los modos de aplicación de las fórmulas (reglas de inferencia, por ejemplo) que, por así decirlo, se hayan impuesto automáticamente nos impiden contemplar seriamente cualesquiera otras posibilidades de aplicación., a las que a partir de ese momento  nos hacen verlas como absurdas.

Por otra parte, es claro que nuestros modos de aplicación de las reglas, las fórmulas, etc. (en otras palabras: nuestras matemáticas), tienen una **justificación práctica**, es decir, nos son objetivamente útiles, nos dan buenos resultados y, por lo tanto, no tenemos por qué cuestionarlos. La justificación última de nuestras matemáticas no es una "operación de la mente". La mente no es una garantía de nada en este caso. Más bien, las matemáticas se justifican por su carácter pragmático y en última instancia su éxito se funda en hechos brutos de la naturaleza humana acerca de los cuales no tiene el menor sentido preguntar nada. El hecho que hay que notar es que reaccionamos en general de la misma manera. Wittgenstein expone el punto como sigue: "'Pero, si tienes razón, ¿cómo es que todos los hombres (o por lo menos los hombres normales) aceptan estos esquemas como pruebas de estas proposiciones?" – Sí, hay aquí una gran – e interesante – concordancia".[8] Si para contar 2 + 2 no tendiéramos de manera espontánea a hacerlo como normalmente lo hacemos (recurriendo a los dedos de las manos, por ejemplo), seguramente tendríamos una aritmética diferente pero también, muy probablemente, una menos

[8] L. Wittgenstein, *ibid*., Parte I, sec. 35, p. 13.

beneficiosa o útil que la que tenemos. En todo caso, sin nuestra nunca cuestionada concordancia en reacciones los juegos de lenguaje no se podrían siquiera gestar.[9]

Quizá no estaría de más preguntarnos: ¿cuál es la función de una prueba? ¿Por qué o para qué tenemos pruebas y no nada más, *e.g.*, experimentos? Una prueba es, como dijimos, un mecanismo que nos lleva de lo que denominamos 'premisas' a lo que llamamos 'conclusión'. Un rasgo fundamental de una prueba es que nos permite dejar establecido de manera definitiva un resultado y, por eso, genera certeza. Se trata de una secuencia de oraciones mediante la cual imponemos como regla que no admite excepciones una determinada proposición, a saber, la última y razonamos de conformidad con ella. En este sentido, una prueba y su conclusión son claramente diferentes de un experimento y su resultado. El resultado de un experimento siempre puede ser un evento inesperado, pero en matemáticas la sorpresa está excluida. No quiero decir que no hay resultados extraordinarios en matemáticas. Lo que afirmo es que no se da el caso de que la mitad de la humanidad infiera algo y la otra mitad algo diferente. Es en este segundo sentido que en matemáticas no hay sorpresas. No obstante, a pesar de ser drásticamente diferentes, no deja de ser curioso que la idea misma de inferencia esté formada a imagen y semejanza de la idea de experimento y, así, que se le asocie a ideas como las de exploración, aventura y descubrimiento. Pero en contraste con las proposiciones de las ciencias empíricas, lo interesante de las reglas matemáticas es justamente su peculiar *status*, el cual consiste en que una vez establecidas la posibilidad de su modificación quedó cancelada. A diferencia de lo que acontece con los experimentos, la experiencia futura no puede afectarla. La razón de ello es que se trata precisamente de reglas que sirven para medir la experiencia (pasada, presente y futura). El hecho de que las reglas matemáticas sean inmodificables no es un misterio ni se explica por medio de alambicadas especulaciones, sino que simplemente significa que nosotros nos forzamos a nosotros mismos a razonar de conformidad con ellas, esto es, a ajustarnos a ellas. Pero esto último no significa ni implica que la regla misma sea lo que se nos impone. Un signo o una regla no tiene fuerza para obligarnos a deducir tal o cual cosa, para extraer tal o cual conclusión o resultado, entre otras razones porque todo signo puede en principio ser interpretado de un sinfín de formas. Wittgenstein nos recuerda esta posibilidad mediante una pregunta retórica: "¿Acaso no puede derivarse todo de algo por medio de *alguna* regla, o inclusive de acuerdo con una regla, con la interpretación apropiada?".[10] Por

---

[9] El caso del juego de lenguaje de las sensaciones podría ayudarnos a ilustrar el punto que Wittgenstein está estableciendo. Es claro que si cada vez que a alguien le duele algo éste hiciera una mueca diferente o reaccionara de diferente de modo y si todos reaccionaran de manera diferente de cómo lo hacen los demás cuando les duele algo, el juego de lenguaje del dolor (y todo lo que entraña) no habría podido construirse. El dolor de los demás sería irreconocible. Lo mismo acontece, *mutatis mutandis*, con los juegos de lenguaje de la aritmética, la geometría, la lógica, etc.

[10] L. Wittgenstein, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, Parte I, sec. 7, p. 5.

lo tanto, si los signos adquieren el *status* de "verdades necesarias" ello se deberá a que nosotros, los usuarios de dichos signos, les conferimos tal rango. Como dice Wittgenstein, somos nosotros los inexorables.

Puede verse que aquí ya están constituidos y operan diversos conceptos sin los cuales no podríamos dar cuenta del fenómenos de la inferencia matemática. El concepto de inferencia, por ejemplo, acarrea consigo al de "seguirse de". En realidad, se trata de una misma idea presentada desde dos perspectivas diferentes, *viz*., la de los hablante y la de los signos. Por una lado decimos que nosotros inferimos algo, dando a entender que efectuamos una actividad peculiar de descubrimiento de conexiones y resultados; por la otra, decimos que una proposición o un resultado se siguen de ciertas premisas, insinuando que la relación entre premisas y conclusión ya estaba allí y que lo único que requerían era su verbalización. El problema es que la forma misma de expresarnos nos induce a malinterpretar lo que hacemos y, por ende, a entender mal o no comprender la situación: no es porque *A* se sigue de *B* que decimos que podemos inferir *B* de *A*, sino que es porque como cuestión de hecho inferimos *B* de *A* que podemos decir que *A* se sigue de *B*. Como bien señala Wittgenstein, el verbo 'seguirse de' es equívoco, puesto que sugiere que algo se da independientemente de que nosotros así lo consideremos, pensemos, creamos, etc. Pero en lo que no se repara es en el hecho de que lo importante de decir (y aceptar) que *A* se sigue de *B* es que se aceptó una regla, a la cual a partir de ese momento nos atenemos. La interpretación equivocada es la que hace del verbo una descripción de un supuesto hecho lógico, cuando en realidad no es más que la indicación de la aceptación de algo por parte de los usuarios del simbolismo.

Lo anterior nos permite aclarar otro rasgo fundamental de las transiciones matemáticas, a saber, su necesidad. Wittgenstein ciertamente comparte el punto de vista tradicional de que las "proposiciones" matemáticas son necesarias. O sea, él no cuestiona, como dice, "La dureza del *debe* lógico".[11] El adversario del carácter necesario de las matemáticas (tanto de proposiciones como de inferencias) es el empirista de corte milliano o quineiano. Ahora bien, aunque en su discusión Wittgenstein rechazará la muy contra-intuitiva posición empirista, su inconformidad se centra más bien en las explicaciones que se dan de la necesidad de los resultados matemáticos. En relación con esto último el enemigo es ante todo, una vez más, el realista. Ahora bien, puede verse que una vez desarticulado el cuadro realista (*i.e.*, su idea de que investigar en matemáticas es como realizar una exploración, que un cálculo matemático es como un experimento, que el matemático percibe conexiones especiales, etc.), su posición se torna realmente débil y el camino queda entonces

[11] L. Wittgenstein, *ibid*., Parte I, sec. 121, p. 37.

libre para generar las aclaraciones alternativas. Así, Wittgenstein hace ver que la obtención de un resultado en matemáticas equivale al establecimiento de una regla que, por razones que ya se adujeron, es inmodificable o inalterable. Esta nueva regla se incrusta en el sistema ya establecido y paulatinamente construido de resultados matemáticos fijos. Para referirse a estos resultados Wittgenstein habla de "paradigmas". Un paradigma es un patrón rígido e independiente ya por completo de la experiencia (a la que regula) y, en ese sentido, es decir, por no ser algo meramente probable, sujeto a nuevas corroboraciones, etc., puede decirse de él que establece una nueva conexión necesaria y, por lo tanto, esencial. Al establecer que 2 + 2 = 4, el matemático fija una conexión entre numerales que ya nada va a alterar. Presentado esto de manera mitológico, podría decirse que el matemático enuncia relaciones necesarias entre el objeto 2  y el objeto 4.  Wittgenstein prefiere decir más bien que "El matemático crea *esencia*".[12]

Esto último puede resultar un pensamiento demasiado provocativo como para tranquilamente dejarlo pasar sin elevar ninguna objeción. Una réplica a este resultado de Wittgenstein que de inmediato se le podría ocurrir a un realista consistiría en señalar que cuando nos las vemos con propiedades esenciales de objetos (en este caso, supuestamente, de números) lo único que no podemos hacer es hablar de "creación" por parte de nosotros. Esencialmente, las cosas son lo que son o mantienen entre sí las relaciones que mantienen, independientemente de nosotros (de que las percibamos, conozcamos, aprehendamos, etc.). Los matemáticos pueden descubrir esencias, mas no crearlas. Esta estrategia, sin embargo, equivale a recurrir a una línea de argumentación que ya fue descartada y lo que ello pone de manifiesto es la incapacidad del realista para explicar, al margen de sus mitos, el carácter necesario de las proposiciones matemáticas. Wittgenstein, en cambio, descubre aquí una veta de valor filosófico incalculable: lo necesario emerge no de descripciones, sino de convenciones. Hablar de esencias es hablar de marcas conceptuales. "También podría haber dicho: no es la propiedad de un objeto lo que es 'esencial', sino la marca de un concepto".[13] Aquí se siente la continuidad del pensamiento de Wittgenstein, puesto que puede claramente rastrearse esta posición en la doctrina de los conceptos formales y las propiedades internas expuesta en el *Tractatus*.[14] Desde esta perspectiva, lo esencial de un objeto brota de la caracterización inicial que de éste se haga. De ahí que Wittgenstein se sienta autorizado a sostener que "cuando se habla de *esencia* –, lo que se hace es constatar una convención".[15] La convención fija conexiones que, una vez establecidas, son necesarias y obviamente (para

[12] L. Wittgenstein, *ibid*., Parte I, sec. 32, p. 13.
[13] L. Wittgenstein, *ibid*., Parte I, sec. 73, p. 23.
[14] A este respecto véase, por ejemplo, mi "Relaciones Internas" en mi libro *Lenguaje y Anti-Metafísica* (México: Plaza y Valdés, 2005). 2ª edición.
[15] L. Wittgenstein, *ibid*., Parte I, sec. 74, p. 23.

nosotros) *a priori*. Y para el realista que insiste en que tiene que haber una diferencia radical o profunda entre proposiciones sobre esencias y proposiciones temporales, accidentales o contingentes, Wittgenstein tiene preparada la respuesta: "a la *profundidad* que vemos en la esencia corresponde la necesidad *profunda* de una convención".[16] Factualidad y necesidad se excluyen mutuamente.

Para la aclaración del concepto de inferencia la alusión a cualquier proceso o estado interno es completamente redundante. Pero si lo que llamamos 'inferir' no es un proceso mental sino más bien la expresión del aprendizaje de manipulación de ciertos signos (premisas, reglas de inferencia) de determinada manera, entonces es inclusive engañoso hablar aquí de "transiciones". Pregunta Wittgenstein: "Ahora bien ¿a qué llamamos 'inferencias' en Russell o en Euclides? ¿Debería decir: a las transiciones que en una prueba llevan de una proposición a la siguiente? Pero ¿en dónde se encuentra la *transición*?"[17] La idea de transición como una especie de transformación interna y mecánica de los signos tan pronto se yuxtaponen unos a otros y se les conecta por medio de reglas de inferencia es una ilusión gramatical, un mito más. Las "transiciones" las efectuamos nosotros porque se nos enseñó a usar ciertos signos de determinada manera, esto es, primero, de una manera que todos reconocemos (todos procedemos igual), en la que todos concordamos y, segundo, de una manera que nos es prácticamente útil.

Lo anterior nos permite comprender mejor lo que podría llamarse 'experiencia matemática'. Los realistas gustan de hablar de visiones, de representaciones, de aprehensiones, etc. El enfoque wittgensteiniano nos libera de toda esta innecesaria mitología. La investigación matemática no es una exploración por territorios ignotos, sino una contribución a la expansión de un simbolismo que cumple con funciones precisas. No hay ninguna vivencia especial de por medio. No hay conexiones que descubrir, sino estructuras simbólicas cada vez más complejas que construir. Ahora bien ¿por qué o para qué se necesitan dichas estructuras? Las necesitamos por su utilidad práctica, es decir, por su aplicación tanto a las proposiciones del lenguaje natural como a las proposiciones de las diversas ciencias. La genuina experiencia humana queda plasmada en las genuinas proposiciones, pero no hay ninguna experiencia genuina conectada con lo que no son más que instrumentos para la expresión de las experiencias. Las expresiones matemáticas son esos instrumentos. Por lo tanto, no hay ninguna experiencia especial que sea la experiencia matemática o lógica, puesto que no hay experiencias para regular las experiencias. La experiencia matemática, en el sentido realista de percepción inusual de conexiones entre entidades abstractas, es una inútil invención filosófica más.

---

[16] L. Wittgenstein, *loc. cit.*
[17] L. Wittgenstein, *ibid*, Parte I, sec. 18, p. 8.

Que no está involucrado en la inferencia ningún proceso interno, de carácter mental, etc., es algo que queda claro si, una vez más, confrontamos lo que Wittgenstein tiene que decir sobre lo que es inferir con lo que dice en las *Investigaciones Filosóficas* sobre lo que es leer. Es inútil intentar ver en la lectura un proceso interno, lo que uno se dice a sí mismo cuando recorre con la vista ciertos signos, una experiencia caracterizada por sensaciones especiales, etc. Más bien, decimos de alguien que ya sabe leer cuando ya no comete errores o los comete sólo ocasionalmente, cuando se detiene en los lugares apropiados, cuando la entonación es la correcta, etc., es decir, cuando de manera general el aprendiz ya reacciona de manera sistemática como cualquier persona de la que decimos que lee normalmente. Lo que nos incumbe para la adscripción de la capacidad de leer es algo que está a la vista de todo mundo. El concepto de leer no está vinculado a procesos neuronales, a estados mentales, a intuiciones de ninguna índole. Es un concepto de carácter eminentemente conductual. Lo mismo pasa con "inferencia": para la formación de este concepto no se tuvo que recurrir a nada que no fuera el registro de las reacciones del alumno. Es un error pensar que no son imaginables o factibles otras formas de inferencia y que si no las hemos hecho nuestras es porque hay un patrón externo a nosotros, objetivo, eterno, divino que las descarta. Lo que pasa es más bien que con esas otras formas de inferencia no habríamos logrado ponernos de acuerdo, no habríamos concordado, nuestros juegos de lenguaje serían caóticos, inexactos, menos exitosos, etc. Lo que llamamos 'inferencia correcta' es la manifestación de una concordancia generalizada respecto a la utilización del simbolismo. Lo correcto es lo que colectivamente la comunidad lingüística así determina. "Ya vi una prueba – ahora estoy convencido. ¿Qué pasaría si súbitamente me olvido de esta convicción?

Luego aquí hay un procedimiento especial: yo *examino* la prueba y luego acepto su resultado. – Quiero decir: esto es implemente lo que *hacemos*. Esa es nuestra costumbre, o un hecho de nuestra historia natural".[18] Es con este reconocimiento que tocamos fondo. No hay nada más qué explicar.

Aquí se nos plantea, naturalmente, el gran problema: parecería que Wittgenstein está defendiendo una tesis convencionalista a ultranza,[19] *viz*., la tesis de que absolutamente cualquier desarrollo y cualquier resultado son posibles: basta con que todos nos pongamos de acuerdo y los aceptemos. Pero esto parecería trivializar el concepto de inferencia, pues parecería implicar que la corrección de una inferencia es un mero asunto de decisión colectiva, de sano acuerdo democrático. Naturalmente, un punto de vista así equivale a la aniquilación de nuestro concepto normal de corrección. Llevado al extremo esto sugiere la idea absurda de que si

---

[18] L. Wittgenstein, *ibid*, Parte I, sec. 63, p. 20.

[19] Que es, como se sabe, de lo acusó M. Dummett en su bien conocida reseña de las *Observaciones sobre los Fundamentos de las Matemáticas*.

todos nos ponemos de acuerdo en que '2 + 2 = 5' entonces, por consenso universal, 2 + 2 = 5. Wittgenstein mismo plantea la objeción como sigue: "Pero, de todos modos, yo puedo inferir sólo lo que realmente *se sigue*! – ¿debería eso significar: sólo lo que se sigue cuando nos atenemos a las reglas de inferencia; o debería significar: sólo aquello que se sigue cuando nos atenemos a *tales* reglas de inferencia, como si de algún modo concordaran con alguna realidad? Aquí con lo que de algún modo vago nos topamos es con que esta realidad es algo muy abstracto, muy general y muy rígido. La lógica es una especie de ultra-física, la descripción de la 'estructura lógica' del mundo, que nosotros percibimos mediante una especie de ultra-experiencia (con el entendimiento, por ejemplo)".[20] La idea de fondo es que lo que es "correcto" o "incorrecto" tiene que ser por completo independiente de nuestro modo de manipular el simbolismo (lógico o matemático, y el lenguaje en general) y sería precisamente porque el mundo se comporta de cierta manera y no de otras que no cualquier transición es correcta o no.

Sería absurdo adscribirle a Wittgenstein la idea de que cualquier inferencia es en principio válida. Su punto de vista no es que no podemos distinguir entre "correcto" e "incorrecto", sino más bien que por medio de 'correcto' e 'incorrecto' no aludimos a realidades sino a prácticas establecidas, a usos colectivos de signos: "pero ¿con qué realidad concuerda aquí 'correcto'? Supuestamente con una *convención*, o con un *uso*, y quizá con requerimientos prácticos".[21] No hay nada por debajo de las convenciones y las prácticas lingüísticas (en un sentido amplio de la expresión) y que las "sustente" o "fundamente". Estamos en la misma situación que cuando queremos dar cuenta de la "dureza" del concepto lógico de deber.

Aquí un veloz recordatorio de un crucial pasaje de las *Investigaciones* se impone. En la sec. 201, Wittgenstein enuncia su "paradoja": "Esta era nuestra paradoja: una regla no podría determinar ningún curso de acción, porque se puede hacer concordar cualquier curso de acción con la regla. La respuesta es: si todo se puede hacer concordar con la regla, entonces también se puede hacer que todo entre en conflicto con ella. Por lo que no habría aquí ni acuerdo ni desacuerdo". [22] Aunque sea instintivamente, detectamos que algo debe estar mal en este resultado, puesto que nos deja sin explicación de lo que es aplicar correctamente un término. La respuesta la da el mismo Wittgenstein un poco más abajo: "A través de esto mostramos que hay una aprehensión de una regla que *no* es una *interpretación*, sino que se exhibe, de caso en caso de aplicación, en lo que llamamos 'seguir la regla' y 'contravenirla'".[23] En otras palabras, Wittgenstein es el primero en admitir que no

[20] L. Wittgenstein, *ibid*., Parte I, sec. 8, p. 6.
[21] L. Wittgenstein, *ibid*., Parte I, sec. 9, p. 6.
[22] L. Wittgenstein, *Philosophical Investigations*, sec. 201.
[23] L. Wittgenstein, *loc cit*.

todo es el resultado de una mera interpretación, es decir, que no podemos arbitrariamente decidir llamar 'correcto' o 'incorrecto' a cualquier cosa, sino que hay efectivamente una forma de aplicar una fórmula o una regla que ejemplifican lo que es la aprehensión correcta de las mismas. Pero lo importante es notar que, independientemente de si hablamos de aritmética o de ajedrez, el que algo sea una aplicación correcta de un signo o de una regla (y, por ende, una inferencia correcta) se explica en términos de usos, de convenciones, de prácticas, de concordancia en reacciones, no de supuestas realidades extra-simbólicas. Recurrir a éstas es simplemente apelar a una imagen y dejar ver que uno no ha podido aún liberarse de su maleficio.

## IV) *Consideraciones Finales*

Lo que he presentado no es más que una de las múltiples aristas del pensar wittgensteiniano en torno a las matemáticas. Creo que podemos constatar que su investigación tiene dos fases y dos facetas, a las que hay que mantener vinculadas. La primera fase de su labor es eminentemente destructiva. En este caso, por ejemplo, el blanco principal (aunque ni mucho menos el único) es el mito realista, esto es, la concepción realista de las matemáticas. La otra fase de su trabajo es la positiva o constructiva, sólo que ésta toma cuerpo no en una nueva teoría, sino a través de las aclaraciones y rectificaciones que va haciendo a lo largo de su ataque. Lo exitoso de la crítica de Wittgenstein se manifiesta en que, una vez aprehendido su pensamiento, estamos en posición de desprendernos de diversos mitos filosóficos, los cuales son sumamente dañinos. Por ejemplo, ahora entendemos por qué podemos hablar de verdad y de falsedad en matemáticas sin tener que asumir la existencia de objetos abstractos o podemos aceptar la idea de que hay una distinción objetiva entre lo correcto y lo incorrecto sin para ello dotar a las matemáticas de carácter descriptivo o factual. Vimos cómo lo que denominamos 'inferencia' en realidad está más bien asociado con reacciones primitivas, animales o espontáneas, de tipo "El fuego quema, eso es fuego y por lo tanto lo evito". Wittgenstein hace un esfuerzo por mostrar la esencial vinculación del concepto de inferir con otros conceptos cognitivos, como "pensar". Su idea es que es al aprender a pensar que se aprende a inferir. No se trata de procesos separados. Otro rasgo interesante del enfoque de Wittgenstein es que, sin convertir a las matemáticas en una ciencia empírica de todos modos recupera su esencial conexión con la experiencia. El proceso en el que Wittgenstein parece pensar es más o menos el siguiente: enunciamos leyes lógicas y matemáticas de manera experimental, pero una vez establecidas las volvemos inmunes a la experiencia. Si conjugamos estas reflexiones con los otros grupos de pensamientos que Wittgenstein produjo en relación con los números, la inducción, la existencia en matemáticas, el infinito, los problemas de fundamentación de las matemáticas,  las contradicciones, etc., veremos que lo que nos legó es ni más ni menos que un cuadro básicamente correcto de eso que llamamos ‘matemáticas’.