Teoría de Conjuntos y Filosofía[1]

I) *Introducción*

La teoría de conjuntos es una disciplina que, ciertamente y más que muchas otras, da qué pensar. Por una parte, se trata de una técnica simbólica sólidamente establecida y bien implantada en la mente del matemático estándar, una herramienta de la que con facilidad se sirve, un cálculo en el que a primera vista al menos se obtienen resultados tan objetivos como en cualquier otra rama de las matemáticas. Por otra parte, sin embargo, es una disciplina plagada de nudos conceptuales, de huecos teóricos, carente de transparencia respecto a su verdadera utilidad y, hay que decirlo, filosóficamente sumamente turbia en lo que a su *status* y a sus implicaciones epistemológicas y metafísicas concierne. La verdad es que no es implausible sostener que la teoría de conjuntos constituye el mejor ejemplo de disciplina en la que se conjugan en forma evidente el manejo de una técnica con la incomprensión de la técnica en cuestión.

No debería, pues, resultarnos sorprendente el que, al leer los escritos de los teóricos de conjuntos casi den ganas de decir: "mientras mejores son técnicamente, menos entienden lo que hacen!". Imposible no traer a colación la última sección de las *Investigaciones Filosóficas*, en la que Wittgenstein traza un interesante paralelismo entre la psicología y las matemáticas: "La confusión y la aridez de la psicología no han de explicarse porque se le llame una 'ciencia joven'; su situación no es comparable a, por ejemplo, la de la física en sus inicios. (Más bien, lo es a la de ciertas ramas de las matemáticas. Teoría de conjuntos). Porque en psicología tenemos métodos experimentales y *confusión conceptual*. (Así como en el otro caso tenemos confusión conceptual y métodos de prueba)".[2] Ciertamente no son la psicología y las matemáticas los únicos casos de ciencias plagadas de confusiones e incomprensiones. Otro caso paradigmático e igualmente ilustrativo nos lo proporciona la física. Sería en verdad demencial dudar de la efectividad del éxito de la investigación empírica del físico, pero lo que ni mucho menos es descabellado es cuestionar la interpretación que el físico

---

[1] Para este ensayo me beneficié de múltiples observaciones precisas, correcciones puntuales y críticas detalladas por parte del Dr. Guillermo Morales Luna y de la Mtra. Sandra Lazzer, a quienes les estoy profundamente agradecido. La responsabilidad respecto a los potenciales errores remanentes en el artículo recae, como es natural, sobre mí.

[2] L. Wittgenstein, *Philosophical Investigations* (Oxford: Basil Blackwell, 1974), Parte II, sec. *xiv*.

hace de su propio trabajo y de sus resultados. Es precisamente porque el físico, por no estar capacitado para ello, no puede dar cuenta de lo que hace lo que explica que sea él mismo quien más contribuya a la proliferación de enredos y enigmas filosóficos en física. Este “no poder dar cuenta” no alude, obviamente, a una incapacidad intelectual por parte del científico, sino meramente a una falta de entrenamiento para la producción de cierta clase de aclaraciones. El diagnóstico general de dicha situación es relativamente simple y consiste en que si bien el físico es un especialista en un área científica determinada, lo cual lo convierte en un manipulador de cierta jerga y de ciertos métodos de investigación, de todos modos sigue siendo un hablante normal, natural. Así, es el físico mismo quien, tan pronto intenta expresar en el lenguaje natural sus resultados alcanzados por medio de un “lenguaje” técnico, quien mejor que nadie tergiversa sus propios resultados y engendra los formidables enredos filosóficos que rodean a la física. Es cuando quiere expresar sus resultados que el físico se ve forzado a construir metáforas, a acuñar símiles, a establecer paralelismos, etc., con cosas o fenómenos que nos son familiares, pero es precisamente por ello que prácticamente **nunca** logra decir lo que realmente quería decir. Nada más absurdo, por ejemplo, que dejarse llevar por la similitud de construcción gramatical y leer una proposición de la física como ‘la materia es energía concentrada’ o ‘$E = mc^2$’ sobre el modelo de ‘el pan está hecho de harina’ o ‘Napoléon = el vencedor de Marengo’. Son, pues, las limitaciones de expresión intrínsecas al lenguaje natural lo que inducen al físico a formular tesis de carácter filosófico y es allí que inevitablemente él incurre en el error y en la confusión. Nótese, sin embargo, que el error filosófico del físico no le impide seguir adelante con sus investigaciones empíricas; lo único que logra es obstaculizar la comprensión de su propia práctica científica. Es por confusiones filosóficas que el hombre de ciencia cree estar haciendo algo muy diferente de lo que en realidad hace.

La situación problemática del físico que acabamos de describir se reproduce de exactamente la misma forma con el teórico-conjuntista: éste imagina que porque es diestro en el manejo de un simbolismo especial, entonces no sólo automáticamente todo lo que diga acerca de su disciplina o ciencia será correcto, sino que sólo él es la autoridad para diagnosticar filosóficamente su propia disciplina. El problema, sin embargo, es que en realidad la mayoría de las veces lo que hace es o emitir absurdos o construir tesis ininteligibles. En este sentido, tal vez la única gran diferencia entre el físico filósofo y el teórico-conjuntista filósofo es que el primero es un poco menos soberbio y arrogante que el segundo y, por consiguiente, éste es menos proclive a tolerar desviaciones referentes a lo que es su interpretación de su disciplina.

Los problemas filosóficos que la teoría de conjuntos engendra o a los que da lugar son de lo más variado, pero resaltan con mayor fuerza los ligados a la teoría del conocimiento y los que podríamos llamar 'de ontología'. Los lógicos y los matemáticos parecen considerar que hay un sentido legítimo de 'conocer' y sus derivados que es independiente del manejo de la técnica involucrada. No debe extrañar a nadie, por lo tanto, que además de saber hacer demostraciones los practicantes de la teoría de conjuntos nos hablen de visiones conjuntistas, de aprehensiones especiales, de formas de conocer completamente inusuales y para las cuales la única justificación que ofrecen es que manejan una técnica, un simbolismo determinado. Obviamente, esto es una falacia: saber de conjuntos no es otra cosa que saber hacer demostraciones en las que aparecen los signos propios de la teoría de conjuntos. No hay un saber especial por encima del saber que se materializa en la manipulación de los signos relevantes. No obstante, debo desde ahora advertir que no es de esta clase de problemas de la que me ocuparé aquí, sino más bien de algunos problemas de metafísica: la existencia o no existencia de lo que Quine llamó 'clases últimas', la interpretación correcta de los axiomas de existencia, la idea misma de conjunto vacío, la concepción iterativa de los conjuntos y cosas por el estilo. Mis objetivos y mi estrategia para alcanzarlos son los siguientes: en primer lugar, intentaré echar por tierra lo que podríamos llamar la 'lectura primitiva' (*i.e.*, filosófica) de la teoría de conjuntos. En un primer acercamiento, esta lectura (que es la compartida por prácticamente todos quienes se ocupan del tema) salta a la vista como evidente de suyo, como "intuitivamente obvia". Pienso, sin embargo, que es completamente errónea y que es lo que está en la raíz de los problemas filosóficos de los que posteriormente nos tenemos que ocupar. Desde mi perspectiva, la comprensión correcta de la teoría de conjuntos tiene que emanar de una descripción fidedigna de sus principios y demostraciones, así como de una explicación adecuada de la utilidad que efectivamente tiene. La lectura alternativa no primitiva de la teoría de conjuntos aspira a generar comprensión sin para ello forzarnos a elucubrar y a construir teorías al respecto.

Como fácilmente podrá apreciarse a medida que avancemos, mucho de lo que afirme en este ensayo está directamente **inspirado** por lo sostenido por Ludwig Wittgenstein, tanto en el *Tractatus Logico-Philosophicus* como en las *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Ello es comprensible si no perdemos de vista que, en última instancia, nuestra meta suprema no es otra que la de destruir mitos construidos en torno a la teoría de conjuntos y generar una visión deflacionaria de la misma. Estoy convencido de que es factible aceptar la técnica de la teoría de conjuntos sin para ello vernos comprometidos con los absurdos filosóficos usuales, independientemente del corte o de la estirpe que sean.

II) ***Notas Propedéuticas***

Algo que de inmediato llama la atención es el carácter declaradamente práctico de la teoría de conjuntos, lo cual en alguna medida explica la ausencia en ella de especulaciones y de lo que, en sentido estricto, podríamos llamar 'teorización'. Esta observación conduce *eo ipso* a la pregunta : ¿por qué entonces hablar de "teoría" en este caso? Antes de pronunciarnos al respecto, me parece que sería pertinente decir unas cuantas palabras acerca de lo que es una teoría, de manera que podamos contrastar lo que afirmemos con lo que digamos acerca de lo que podríamos denominar los 'instrumentos de las teorías'.

Sin pretender ofrecer otra cosa que una respuesta general pero que sea tal que nos permita responder a nuestro interrogante inicial, preguntémonos: ¿qué es una teoría?

Para empezar, quisiera señalar que por 'teoría' voy a entender 'teoría empírica', porque si algo puede servir de paradigma en este sentido ese algo es precisamente una teoría de las ciencias "duras". Así entendida, una teoría es ante todo una construcción proposicional elaborada por medio de un aparato conceptual particular. Dicho aparato presupone un vocabulario técnico, *ad hoc*, caracterizado por una peculiar relación con la experiencia perceptual normal. Esto es comprensible: después de todo, si una teoría es empírica es porque las afirmaciones que permite hacer son, de una u otra forma, de manera más o menos directa (o inclusive indirecta) corroborables en la experiencia. La importancia del nuevo aparato conceptual consiste en que con él automáticamente quedan acotadas las áreas por investigar. O sea, los conceptos empleados delimitan el área de investigación. La realidad que se estudia es la que queda delimitada o recortada por los conceptos de que se trate. Una provechosa consecuencia de esto es que en ciencia siempre se sabe de qué se habla y, más importante aún, en general se puede determinar con precisión qué es un problema y qué no lo es, qué es una pregunta genuina y que es una pseudo-dificultad. Lo que una pregunta formulada por medio de palabras que no pertenecen a la teoría plantea es un pseudo-problema. Esto no significa ni implica que entonces la resolución de cualquier problema será algo fácil o automático una vez hecho un planteamiento legítimo. Lo único que sostengo es que, en general, en ciencia se puede determinar si una pregunta es relevante o no y si lo que se presenta como un problema efectivamente lo es o no. Desde luego que hay casos problemas, casos en los que en una primera etapa al menos no se puede saber si el problema es genuino o no. Así pasó con, por ejemplo, los famosos rayos Γ, a principios del siglo pasado. Sin embargo, aunque la polémica se extendió más de lo que hubiera sido deseable, lo cierto es que después de múltiples experimentos, de resultados fallidos, de reveses en las predicciones, de explicaciones alternativas efectivas, etc., los rayos Γ fueron descartados y la rama de la física que se ocupaba de ellos pudo seguir entonces su desarrollo lineal usual. Inclusive, puede darse el caso de que se pueda hacer ver que algo **no** se puede obtener. Ese fue el caso, por ejemplo, de la vacuna en contra del SIDA: en 1987, los científicos podían determinar con precisión que antes de 20 años era experimentalmente imposible producir una vacuna en contra del SIDA. Es claro, sin embargo, que esto no echa por tierra lo que hemos afirmado: un resultado negativo puede ser también un resultado establecido científicamente. Y un último punto en relación con las características de las teorías: éstas siempre requieren de un instrumental especial, de una especie de lenguaje *ad hoc* para ellas. Este "lenguaje" lo proporcionan o lo constituyen las matemáticas.

¿Con que podemos contrastar las teorías? En primer lugar, con las descripciones que hagamos en el lenguaje natural. Esto, empero, no es relevante para nuestros propósitos. Lo que para nosotros en cambio sí es importante es el contraste que podemos trazar entre la teoría y el instrumental del que la teoría se sirve, esto es, las matemáticas. Podría objetarse que no hay tal distinción sobre la base de que en algún sentido el instrumental forma parte de la teoría misma. Esto, sin embargo, no parece ser exacto, por la sencilla razón de que ese mismo instrumental forma parte de **cualquier** otra teoría. Lo que esto a su vez hace ver es que se trata de un cuerpo simbólico lógicamente independiente. Las matemáticas son un "lenguaje" universal, en el sentido de ser un instrumental útil en o para cualquier ciencia particular. Así, por ejemplo, una cosa es una teoría acerca de la materia y otra una teoría acerca de flujos de capital, pero las matemáticas de la física y las de la economía son (o pueden ser) las mismas. Ahora bien ¿por qué son importantes los instrumentales simbólicos en o para las teorías empíricas? La respuesta es sencilla y obvia. En primer lugar, porque es por medio de ellos que se pueden hacer mediciones, cálculos, predicciones; en segundo lugar, porque son parte del instrumental que permite hacer transiciones.

A este respecto, recordemos la muy atinada observación de Wittgenstein en el *Tractatus*: "En la vida no es nunca una proposición matemática lo que necesitamos. Más bien, empleamos proposiciones matemáticas *únicamente* para inferir de proposiciones que no pertenecen a las matemáticas otras que, de igual modo, tampoco pertenecen a las matemáticas".[3] Así, pues, y esto es muy importante, el rol de las matemáticas en las ciencias es puramente operativo. Pero esto último tiene consecuencias nada desdeñables y una de ellas sin duda es que si efectivamente ese es el rol de las matemáticas es porque las matemáticas no aportan nada sustancial a las teorías en las que se incrustan. Dicho de otro modo, las matemáticas no contribuyen con ninguna clase de ontología. No hay un universo matemático que, por así decirlo, se sume a los de las teorías mismas. No hay, además de las entidades físicas o biológicas presupuestas por las teorías, un universo de números que de alguna extraña manera se funda con ellas. Las teorías empíricas no estudian universos abstractos, sino que estudian el mundo real por medio de abstracciones. Pero si las teorías empíricas no versan sobre realidades misteriosas y desconectadas del mundo real y las matemáticas no son más que un instrumento para las teorías, lo que empieza a vislumbrarse es la idea de que la concepción misma de un mundo de entidades matemáticas abstractas es una aberración. No hay, en el sentido ontológicamente relevante de 'haber', universos matemáticos.

Si nuestras suspicacias referentes a las "ontologías formales" ejemplificadas en las matemáticas están justificadas, lo que era un sospecha se convierte en una certeza cuando llegamos a la teoría de conjuntos. Por lo pronto, nuestra pregunta es: ¿es la teoría de conjuntos una teoría o un instrumental para las teorías? Para ser más preciso, quizá lo que deberíamos preguntarnos es si la teoría de conjuntos es una teoría, en el sentido delineado más arriba, o si no es más bien un instrumental para las matemáticas! La pregunta es entonces: ¿es la teoría de conjuntos una teoría en sí misma o es más bien un instrumental para un instrumental? A reserva de intentar desarrollar la idea más abajo, quisiera adelantar mi punto de vista. Desde mi perspectiva, la teoría de conjuntos no es más que la gramática (o parte de ella) de los lenguajes matemáticos. Es un instrumental conceptual ideado para poner orden en el mundo de los números y de las estructuras matemáticas, exhibiendo las reglas que rigen a los sistemas matemáticos. Se apeló a la teoría de conjuntos en primer término para el esclarecimiento de algunos tópicos matemáticos y una vez demostrada su utilidad y, por lo tanto, una vez "establecida", tuvo (como siempre en matemáticas) un desarrollo "inmanente". Pero es claro ahora que si era debatible hablar de

[3] L. Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus* (London: Routledge and Kegan Paul, 1978), 6.211 (a).

ontología, de universos, de entidades al hablar de las matemáticas, al hablar del instrumental para las matemáticas un discurso así se vuelve no sólo absurdo sino peligrosamente absurdo, por mitologizante y hechicero.

III) ***Matemáticas***

Tal vez debamos, antes de seguir adelante, decir unas cuantas palabras acerca de las matemáticas mismas. No es desde luego nuestro propósito añadir una definición más a la larga lista de las que ya han sido ofrecidas a lo largo de la historia de la filosofía. Es bien sabido que, desde que recurrieron a ellas, los hombres se han preguntado qué clase de verdades son las verdades matemáticas y de qué clase de entidades se ocupan. Las caracterizaciones de las matemáticas han sido de lo más variado y, por lo general, igualmente inútiles unas que otras. Por ejemplo, es claro que no se nos esclarece nada si se nos dice que las matemáticas son "la ciencia de las cantidades" y si se afirma del número que es "la unidad dentro de la multiplicidad" o cosas por el estilo. Ahora bien, lo que estos fracasos definicionales ponían de relieve era simplemente que los matemáticos estaban en la muy incómoda situación de tener una "ciencia", que sistemáticamente desarrollaban y a la que de todas las áreas del conocimiento se recurría, de la cual sin embargo eran incapaces de dar cuenta. Es precisamente en este punto que se revela la utilidad de la teoría de conjuntos: con este nuevo armatoste formal se pudo finalmente elaborar una explicación adecuada de la naturaleza del número, de los principios matemáticos (inducción, las operaciones aritméticas, etc.) y de las estructuras algebraicas con las que se trabaja en matemáticas. Se pudo así superar la fase del recurso a las imágenes y a las metáforas y sustituirlas por definiciones precisas. De ninguna manera, sin embargo, el progreso representado por la teoría de conjuntos autorizaba, como lo han pensado sus adeptos, a hablar de "reducciones ontológicas" ni de nada que se le parezca. Sobre esto, naturalmente, regresaremos más abajo.

Desde nuestro punto de vista, el rasgo fundamental de las matemáticas es que éstas se constituyen a través de sistemas regidos por lo que Wittgenstein denomina 'leyes internas'. Los números naturales, por ejemplo, forman una serie regida por una ley interna, una ley de expansión. Las matemáticas son sistemas que crecen, pero lo hacen en concordancia con leyes formales. No hay nada empírico en ellas. Por otra parte, la afirmación de que en matemáticas nos las habemos con sistemas distintos, como por ejemplo los constituidos por los números enteros naturales y los números irracionales, se funda en la constatación de que damos explicaciones diferentes de ellos. Esto exige ciertas aclaraciones para ser debidamente entendido.

Es evidente, o debería serlo, que el simbolismo matemático es un simbolismo parasitario del lenguaje natural. En verdad, su funcionamiento se entiende sólo cuando se describe su íntima conexión con este último. Podría imaginarse (con dificultades, es cierto) una sociedad con un lenguaje carente de números, pero no una sociedad que nada más dispusiera de matemáticas. Por lo tanto, por lo menos en el caso del sistema numérico más simple, que es el de los números naturales, la explicación de su funcionamiento y utilidad exige que los veamos como teniendo algo que ver con las palabras del lenguaje. Ahora bien, la clase de palabras que más directamente está relacionada con los números es la de los adjetivos. Desde esta perspectiva podemos afirmar que, si los adjetivos significan conceptos, un número natural no es entonces otra cosa que la extensión de un concepto. Decir que hay tres objetos rojos es decir que **este** objeto es rojo y **este otro** objeto es rojo y **este otro objeto** también es rojo. O sea, los tres objetos son (en este ejemplo) la extensión del predicado "ser rojo" y lo que vale para el 3 vale para cualquier otro número, por inmenso que sea (*e.g.*, 2006^{26}). Esto es importante, porque permite comprender que tiene sentido decir que existen los objetos y lo rojo, pero que no hay bases para decir lo mismo del 3. El número 3 no es más que un mecanismo lingüístico simple que emerge de una necesidad natural de contar y de distinguir objetos unos de otros (o de agruparlos, según el caso), siendo contar una forma de lidiar con los objetos, de enfrentarse a ellos. El que se use el signo '3' como sujeto de oraciones no convierte a '3' en un nombre propio. Los números son conceptos formales, no conceptos genuinos, como "rojo" o "ser padre de". De ahí que, como bien se señala en el *Tractatus*, la noción crucial para entender la idea de número sea no la de objeto, sino más bien la idea de operación. Es por eso que Wittgenstein afirma que "Un número es el exponente de una operación".[4]

Lo anterior es claramente una manera aceptable de explicar funcionalmente lo que es un número entero natural. No obstante, una explicación así podría resultarle inaceptable (o por lo menos insuficiente) a quien considerara otras clases de números, verbigracia los irracionales. A primera vista al menos, podría dudarse de que la caracterización de Wittgenstein permitiría explicar lo que es, por ejemplo, '$\sqrt{2}$'. Empero, para él también los números irracionales son exponentes (o factores) de operaciones, sólo que hay que entender la especificidad de las operaciones en función de las cuales queda caracterizado. Lo

---

[4] L. Wittgenstein, *ibid*., 6.021.

que Wittgenstein sostiene es que, puesto que los números irracionales pueden expandirse *ad infinitum*, la idea de número irracional está ligada más que a otra cosa precisamente a la idea de expansión de una ley. Esto último, sin embargo, no invalida la definición introducida en conexión con los números naturales, sino simplemente nos hace ver que ésta era una caracterización sumamente general y que requiere de especificaciones particulares en función de las clases de números que se estén considerando. Por eso, puesto que cualquier número irracional puede expandirse o crecer tanto cuanto se quiera, nuestra atención habrá de fijarse no en una etapa particular de la expansión sino en la regla misma que la rige, esto es, la ley formal involucrada, y esto nos retrotrae a la noción de operación. Así, pues, aunque se tengan que dar explicaciones diferentes de sistemas numéricos distintos, de todos modos los números siguen siendo exponentes de operaciones. Ahora bien, lo importante de este contraste de explicaciones es que nos permite entender que con lo que nos las habemos en matemáticas es con una variedad de sistemas que son en cierto sentido acumulativos, pero que quedan caracterizados en función de leyes o reglas diferentes, y por ende de operaciones diferentes. Wittgenstein siempre aprovechó, en ambos sentidos, un cierto paralelismo que se da entre números y proposiciones: así como una proposición es todo aquello que se parece a lo que se denomina 'proposición', a la proposición paradigmática, y que es sometida a los mismos procedimientos y reglas que ésta, así también un número es todo aquello que se parece a lo que en primer término llamamos 'número' y que permite un tratamiento semejante. Estrictamente hablando, el 2 del conjunto de los números naturales no es el 2 de '$\sqrt{2}$'. Una explicación semejante se puede avanzar en relación con, por ejemplo, $\aleph_0$.

Algo de primera importancia que de uno u otro modo se deriva de lo anterior es que los simbolismos matemáticos son sistemas rígidos, de carácter funcional u operativo, indispensables quizá pero en todo caso **no descriptivos de nada**. En matemáticas no se habla de nada, puesto que el simbolismo matemático **no** es, estrictamente hablando, un lenguaje. Como una consecuencia de lo anterior habría que reconocer que "Las proposiciones de las matemáticas no expresan pensamientos".[5] Las matemáticas no versan sobre nada; por decirlo de alguna manera, no tienen tema. En palabras de Wittgenstein: "La aritmética no habla acerca de números, sino que trabaja con números".[6] Es evidente, por otra parte, que si queremos expresar algo respecto de los números naturales inevitablemente tendremos que hacerlo tomando como modelo las oraciones

[5] L. Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, 6.21.
[6] L. Wittgenstein, *Observaciones Filosóficas*. Traducción de Alejandro Tomasini Bassols (México: IIF/UNAM, 1997), sec. 109.

normales del lenguaje natural. Son, pues, nuestras formas normales de expresión lo que nos confunde. Por ejemplo, el que 3 sea un número primo es algo que se muestra en nuestras operaciones. ‘8 ÷ 4’ me da como resultado un número entero, en tanto que ‘3 ÷ 4’ u ‘11 ÷ 4’ no. Que el 3 o el 11 sean números primos es algo que se revela o se muestra en las operaciones que se hagan, en el cálculo mismo. Empero, tan pronto dejamos el cálculo y pasamos a hablar de los números, al margen ya de las operaciones que con ellos efectuamos, pretendiendo expresar en palabras sus rasgos característicos o esenciales, los reificamos y al hacerlo nos extraviamos intelectualmente. Al decir ‘el 3 es un número primo’ imperceptiblemente cambiamos su *status* y lo que era una regla del sistema queda convertida en una propiedad de una entidad. Nos vemos llevados entonces a pensar que ‘3 es un número primo’ es como (en el sentido relevante) ‘Cantinflas es mexicano’ y eso es un error de consecuencias incalculables. No hay tal cosa como proposiciones matemáticas, aunque nosotros constantemente nos hacemos caer en la trampa de considerar las expresiones del simbolismo matemático como si lo fueran. Una regla de cálculo y de inferencia se convierte entonces en una descripción y como no hay entidades físicas observables que respondan a expresiones numéricas automáticamente les resulta fácil a muchos simplemente postular un mundo de entidades abstractas, con todo lo que eso acarrea.

Un reto importante para quien quiera dar cuenta en forma global de las matemáticas es que tendrá que explicar su “objetividad”. La posición estándar consiste en decir que las proposiciones matemáticas son verdaderas o falsas en el mismo sentido en que lo son las proposiciones de las ciencias empíricas o las afirmaciones hechas en el lenguaje natural, sólo que lo son de un modo un poco más fuerte. En fraseología filosófica esto se expresa diciendo que son *a priori*. Esto, aparentemente, llevaría a sostener que si las matemáticas son objetivas ello es porque efectivamente describen un sector especial de la realidad, a saber, el sector abstracto, o por lo menos uno de ellos. Pero una posición así no sólo no es explicativa, puesto que se limita a postular lo que se quiere hacer pasar por explicación, sino que es mucho menos plausible que aclaraciones alternativas. Por ejemplo, es obvio que las matemáticas tienen una faceta convencional, sólo que esta faceta se pierde por completo en la explicación usual. ¿Qué es lo convencional en las matemáticas? No quiero hacer mío el punto de vista del positivismo lógico de que es por una mera estipulación lingüística que ‘2 + 2 = 4’ es verdadero, esto es, que esa “proposición” verdadera resulta de los significados arbitrariamente adscritos a los signos involucrados como resultado de alguna clase de consenso. Yo pienso que resultados alternativos eran viables. Lo que sí es claro es que, una vez establecido el sistema, pensar en concordancia con un sistema alternativo se vuelve imposible. Es por eso o en ese sentido que las matemáticas son *a priori* y necesarias. Pero el que así sean no cancela la posibilidad de que otras matemáticas (que no tenemos y ni siquiera visualizamos) habrían podido establecerse. Esto quizá se explique mejor mediante un ejemplo imaginario.

Consideremos el lenguaje de los colores. Tenemos nombres de colores: 'rojo', 'verde', etc. Los colores a nosotros nos parecen simples. Más aún: constituyen el paradigma de lo simple. Ahora bien, es perfectamente imaginable que los humanos hubieran elaborado un sistema de nombres de colores en los que, para aplicarlos, fuera necesario considerar otra cosa, como por ejemplo la forma o la saturación del color. Por ejemplo, podría hablarse de "rojo" sólo cuando se tratara del color de la sangre, pero si se tratara de un producto químico se tendría que hablar más bien de "rojoq". En ese lenguaje se dirían cosas que nosotros no expresaríamos de la misma manera y nuestra forma de expresión sería ininteligible (o deformada) para sus usuarios. Mientras que nosotros decimos que la sangre y el color de la bandera son rojas, ellos dirían que la sangre es roja en tanto que el color de la bandera es rojoq. Por consiguiente, sobre la base de convenciones imaginables diferentes se generarían descripciones diferentes. Y lo que sostengo es que lo mismo habría podido pasar, *mutatis mutandis*, con las normas aritméticas. El sistema de aritmética elemental que prevalece no es ni el único imaginable ni el único viable. Lo que sí es es ser el sistema que a nosotros, los seres humanos, constituidos como sabemos que lo estamos, que percibimos, reaccionamos, seguimos reglas, etc., como lo hacemos, mejor nos acomoda (el único, quizá). Nosotros desarrollamos las series al modo como lo hacemos, pero es claro que no hay nada en las series mismas que nos obliguen a desarrollarlas de un modo determinado o en las reglas establecidas que nos fuercen a aplicarlas como lo hacemos. La objetividad de las matemáticas consiste en que se trata de sistemas simbólicos que, por su peculiar función, una vez establecidos no hay manera de proceder desviándose de ellos. O sea, no es ni por razones internas al simbolismo matemático mismo ni en virtud de supuestas realidades abstractas que las matemáticas son objetivamente verdaderas. Hay un número infinito de sistemas matemáticos divergentes, pero de todos los posibles hay sólo uno que a nosotros nos sirve, a saber, el que de hecho tenemos y que obviamente no estamos dispuestos a modificar o a remplazar.

Lo anterior nos lleva a una problemática interesante. Parecería que los sistemas matemáticos tienen un desarrollo inmanente, independiente por completo de la utilidad que presten. Esto, sin embargo, no es más que un espejismo epistémico. Los sistemas matemáticos tienen un desarrollo inmanente porque son sistemas algorítmicos y están regidos por leyes formales, internas. De hecho, es debatible si podemos hablar de "desarrollo" en estos casos. 'Expansión' parece un término más apropiado. En todo caso, dicho "desarrollo" es factible precisamente porque las matemáticas no dependen en lo absoluto de la experiencia. En matemáticas no hay experimentos. Se pueden desarrollar los sistemas que se quieran, puesto que a final de cuentas en ellos todo es un asunto de consistencia, siendo nosotros, los humanos, quienes determinamos lo que es contradecirse o seguir la regla apropiadamente. Sin embargo, hay un sentido de 'validación', el sentido gracias al cual se puede pasar de mero juego formal a sistema matemático, en el que la validación de las matemáticas viene dada por la utilidad que demuestran tener. Es porque permiten desarrollar complejas teorías empíricas y en general por su utilidad en la vida cotidiana que las matemáticas son "verdaderas" y "objetivas". Pero es evidente que esta utilidad no es utilidad proposicional, sino meramente instrumental. Es porque las expresiones matemáticas se integran a las proposiciones (tanto teóricas como del lenguaje natural) que se les considera también como proposiciones, pero un examen de su papel real deja en claro que cumplen funciones totalmente diferentes a las de las proposiciones y que así se les llama no "por cortesía", sino por falta de una palabra más apropiada.

Si para algo debería haber servido nuestra breve disquisición es para reforzar la idea de que en las matemáticas no se habla de nada. Una vez más, las matemáticas carecen de ontología. Son las formas superficiales de hablar lo que nos induce a pensar otra cosa. Esto no nos compromete ni con posiciones intuicionistas ni con tesis formalistas ni con puntos de vista realistas. De hecho, rechazamos todas esas corrientes. Desde luego que usualmente los matemáticos hablan de entidades, existencia, verdad, etc., pero esto no es más que una mera *façon de parler*. Nadie, en ningún contexto, escapa a estas modalidades lingüísticas. Todos, por lo tanto, de manera natural tendemos a hablar, *e.g.*, de los "universos matemáticos", los "fundamentos de las matemáticas", el "infinito matemático", y así indefinidamente. No tenemos nada que objetar a estas formas de hablar, siempre y cuando tengamos presente que aunque legítimas son equívocas y muy fácilmente pueden hacernos caer en la confusión y la mitologización.

Fue debido a la complejidad de los sistemas matemáticos y la incapacidad de los matemáticos de dar cuenta de su disciplina que la teoría de las clases tuvo tanto éxito. Gracias al simbolismo de la teoría de conjuntos resultó factible ofrecer definiciones precisas de nociones matemáticas. No es que por medio de la teoría de conjuntos (uso aquí indistintamente ‘clase’ y ‘conjunto’) se aporten soluciones a problemas matemáticos, sino que al ser traducidas al lenguaje de la teoría de conjuntos se pueden manipular más eficazmente los sistemas numéricos y las estructuras abstractas con las que se opera en matemáticas. Gracias a la teoría de conjuntos las matemáticas pueden ser contempladas, por así decirlo, desde fuera y en su totalidad, lo cual aclara lo que podríamos llamar ‘situaciones matemáticas’ y facilita su manejo. Ahora bien, nada de esto vuelve transparente el *status* de la teoría de conjuntos, de la que debemos ahora ocuparnos y para lo cual se requiere que hagamos de ella una presentación somera y sencilla.

IV) ***Teoría de Conjuntos***

Debo advertir desde ahora que ni mucho menos forma parte de mis objetivos hundirme en un estudio de teoremas de la teoría de conjuntos o de problemas técnicos que plantea. No son esos mis temas en este ensayo, que es de aspiraciones mucho más humildes. Tampoco me propongo examinar a fondo los problemas, estrictamente matemáticos, que llevaron a Cantor (su inventor) a desarrollar la teoría de conjuntos.[7] Algunas palabras en este sentido, no obstante, serán imprescindibles, para poder ubicar mejor a la teoría y estar en una mejor posición para comprender debidamente su *status*.

Un tema para nosotros particularmente importante es, desde luego, el de las relaciones que se dan entre la teoría de conjuntos, la lógica y las matemáticas. A este respecto, lo primero que hay que señalar es que lo que prevalece es la incomprensión y el caos. La situación prevaleciente parece ser la de que cada matemático o cada lógico da su propia versión del asunto, sin que les preocupe el que éstas coincidan o no. En un importante texto clásico de teoría de conjuntos, por ejemplo, se nos dice lo siguiente: “Aunque el presente libro está oficialmente dedicado al tratamiento de los fundamentos de la teoría de conjuntos únicamente, el hecho de que la teoría de conjuntos sea una (y según algunos la única) disciplina fundamental del todo de las matemáticas por una parte, así como parte de la lógica por la otra, nos forzará a interpretar nuestro tópico de manera sumamente liberal y a menudo entraremos a discutir los fundamentos de la lógica como un todo y de las matemáticas como un todo. Es bien sabido que muchos

---

[7] A este respecto véase el excelente libro de I. Grattan-Guiness, *The Search for Mathematical Roots 1870-1940* (Princenton/Oxford: Princeton University Press, 2000).

pensadores se sienten extraviados al delimitar las fronteras de estas disciplinas. A menudo se ha dicho que la teoría de conjuntos les pertenece a ellas simultáneamente y que forma su vínculo común".[8] Como puede fácilmente constatarse, los matemáticos, los lógicos y los teórico-conjuntistas hablan con el mismo desparpajo de los fundamentos de la lógica que de los de las matemáticas o que de los de la teoría de conjuntos. La cuestión de qué "fundamente" qué es una temática que, como iremos viendo, es todo menos clara.

Iniciemos, pues, nuestra sencilla exposición de la teoría de conjuntos diciendo unas cuantas palabras respecto a su origen. La "teoría" en cuestión surgió como una respuesta por parte de Cantor a problemas estrictamente matemáticos y, más específicamente, a problemas en los que se combinan geometría y aritmética. Por ejemplo, uno de los problemas que él quería resolver era el de determinar cuántos puntos hay en una línea. Fue para responder a esa extraña pregunta que Cantor desarrolló lo que originalmente se conoció como la 'teoría de los agregados', que fue la expresión que él empleó. La respuesta de Cantor al problema es que hay $2^{\aleph}$ puntos en una línea. Cantor, por otra parte, pensaba que $2^{\aleph}$ era el primer número transfinito inmediatamente después de $\aleph_0$. Esa es la así llamada 'hipótesis del continuo'. Es obvio que ni mucho menos estamos nosotros intentando hacer contribuciones técnicas, esto es, internas al cálculo, pero eso no implica que no podamos dar expresión a nuestra sensación de extrañeza ante la decisión de hablar de '$\aleph$' (Aleph 0) como si fuera un número. Lo menos que podemos afirmar acerca de la pregunta cantoriana de cuántos puntos hay en una línea es, primero, que es una pregunta sumamente extraña (por no decir descabellada) y, segundo, que contrariamente a las apariencias la respuesta no parece venir dada en términos numéricos. Lo que se hace es introducir un signo nunca antes empleado, el cual es puesto en conexión sistemática con los números, de modo tal que a su vez se le trata como si fuera el nombre de un número nuevo. Parecería que con ello se descubre un nuevo mundo (algunos lo han llamado un 'paraíso'). No obstante, la prueba de que tanto la pregunta como la respuesta de Cantor son extrañas es que se da una y la misma respuesta para cualquier línea! O sea, tanto una línea de un centímetro como una línea de un metro como una de un kilómetro se componen del mismo "número" de puntos, a saber, $\aleph_0$. Esto puede dejar satisfecho a cualquier matemático, porque él maneja además de las usuales otras reglas, reglas nuevas para la manipulación de un nuevo vocabulario que se suma al que tenía, pero es claro

---

[8] Abraham A. Fraenkel y Yehoshua Bar-Hillel, *Foundations of Set Theory* (Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1958), p. 5.

(aunque para ellos haya dejado de serlo) que lo que aquí se operó fue una modificación en el significado de 'número'. Dicho significado súbitamente se amplió. Es evidente que la respuesta de Cantor no es una respuesta numérica en el sentido estándar. Al matemático esto no le preocupa porque, como dije, recurre a reglas diferentes (a menudo no hechas explícitas) de las usuales, por lo que él se siente plenamente justificado en seguir hablando de $\aleph_0$ y de $\aleph_1$ **como si** fueran (por así decirlo) nuevos números concretos, a saber, los primeros números transfinitos. Así, pues, la respuesta estándar acerca del "número de puntos" puede ser entendida como siendo de carácter numérico sólo porque se le da a '$\aleph_0$' una interpretación numérica. Es obvio, sin embargo, que lo que realmente se hizo fue cambiar el significado de 'numérico'. En todo caso, lo importante para nosotros es notar que fue con la noción de infinito que hizo su aparición en el escenario la idea de conjunto. En efecto, $\aleph_0$ no es otra cosa que la cardinalidad del conjunto de los números naturales.

Curiosamente, de manera más o menos concomitante y en forma totalmente independiente del trabajo de Cantor hubo quien, desde otra perspectiva y teniendo objetivos diferentes en mente, recurrió a la noción de conjunto. Me refiero, desde luego, a Frege. Para Frege la idea de clase era ante todo una noción lógica y desde luego crucial para su programa de definir las nociones y las operaciones aritméticas básicas. Si la noción cantoriana de agregado y la noción fregeana de clase son una y la misma, ello es algo sobre lo que no me siento capaz de pronunciarme pero que me parece ser una cuestión digna de ser discutida con cuidado. Por lo menos *prima facie* no son idénticas: para Cantor, la noción de agregado era una noción estrictamente matemática, numérica, ubicada por así decirlo en la cúspide de las matemáticas, en tanto que para Frege la noción de clase era una noción estrictamente lógica localizable más bien en sus fundamentos. En general, los teóricos de conjuntos, los matemáticos y los lógicos que reflexionan sobre cuestiones de fundamentos de las matemáticas no prestan la menor atención a diferencias como esta, sin percatarse de que por dejar pasar sin discutir sutilezas así que se van gestando los graves problemas de comprensión que posteriormente se plantean y que se vuelven prácticamente imposibles de dilucidar. Independientemente de lo anterior, nosotros podemos ya plantearnos la pregunta: ¿qué se entiende en general por 'teoría de conjuntos'?

Una de las muchas formas como podría caracterizarse la teoría de conjuntos sería decir que se trata del estudio de la noción de pertenencia ('$\in$').

Así, a secas, sin embargo, esta caracterización es insuficiente. Esta caracterización es adecuada sólo si se hace explícito su trasfondo natural, esto es, la lógica de primer orden con identidad. Es por eso que los lógicos y los matemáticos sin mayor recato la fusionan con la lógica, pues les resulta muy cómodo hacerla pasar como parte de ella, cuando en todo caso lo que en realidad representa es una ampliación de la lógica. Ahora bien, la noción de pertenencia automáticamente acarrea consigo otras, como la de conjunto, y las de operaciones entre conjuntos, puesto que por sí sola no significa nada ni serviría para nada. Tiene sentido hablar de pertenencia sólo si podemos decir, *e.g.*, que un algo, *i.e.*, un elemento, le pertenece a otro algo o que es miembro de otro algo, esto es, de un conjunto. Así, pues, al integrar en un único cuerpo de doctrina la lógica y la teoría de conjuntos lo que los lógicos efectivamente hacen es enriquecer la lógica matemática clásica con la noción de pertenencia y con el aparataje simbólico que ésta entraña (conjuntos, unión, intersección, conjunto potencia, etc.). Aquí las prioridades son importantes y deben quedar claras: no es la lógica la que se incrusta en la teoría de conjuntos, sino a la inversa. Es por eso que, como ya se dijo, en general lo que se afirma es que la teoría de conjuntos es parte de la lógica.

No estará de más observar que esta última es una afirmación problemática. Por ejemplo, a menudo se sostiene que la teoría de conjuntos es una rama más de las matemáticas, pero también que la lógica sirve para fundamentar las matemáticas. La situación no es clara: ¿tiene acaso sentido sostener que una rama de las matemáticas, una de las más tardías dicho sea de paso, sirve también o al mismo tiempo para fundamentar el todo de las matemáticas? Parecería seguirse o que la lógica no sirve para fundamentar las matemáticas o que la teoría de conjuntos no pertenece a la lógica o que no es una rama de las matemáticas. La sospecha que a nosotros nos invade es, como ya lo manifestamos, que la teoría de conjuntos **no** es una teoría matemática más, sino más bien un instrumental para las matemáticas. Las teorías matemáticas son sistemas o cálculos numéricos y lo que deseo sostener es que el cálculo de clases **no** es un sistema numérico más, si bien todo cálculo matemático se puede poner en conexión sistemática con la teoría de conjuntos. En todo caso, es imposible no admitir que, en lo que a las relaciones entre la lógica, la teoría de conjuntos y las matemáticas atañe, a lo que asistimos es a un fracaso casi total de comprensión. Como ya se dijo, cada teórico presenta el cuadro que más le complace y se está lejos de llegar a un acuerdo generalizado. Lo que en general sucede es que se hacen todas las afirmaciones posibles bajo el supuesto tácito de que todos entienden los que los demás afirman. Por ejemplo, se habla de "fundamentación" pero, aparte de que no está en lo más mínimo claro qué es fundamentar una ciencia y por qué sería eso una tarea ineludible en el caso de las matemáticas, urge preguntar: ¿qué fundamenta a qué? ¿La lógica a las matemáticas? ¿O eso es algo que logran sólo la lógica y la teoría de conjuntos de manera conjunta? Por otra parte y dejando de lado la cuestión de si las matemáticas requieren de fundamentación alguna, ¿cómo se vinculan la lógica y la teoría de conjuntos? De que hay aquí graves enredos conceptuales y de comprensión es algo que los teóricos mismos reconocen. Por ejemplo, hay quien ha aseverado que "Tenemos menos certeza que nunca acerca de los fundamentos últimos de la (lógica y las) matemáticas".[9] Aquí es un gran lógico quien nos habla de los "fundamentos de la lógica",[10] sugiriendo que esto es algo que le corresponde a la teoría de conjuntos proporcionar (!). Pero ¿cómo podría una rama de las matemáticas fundamentar aquello que se supone que sirve para fundamentar las matemáticas *in toto*? Lo único que no se puede aseverar es que haya en este ámbito del conocimiento claridad y comprensión conceptuales.

No estará de más recordar que los problemas para la teoría de conjuntos surgieron casi inmediatamente después de su aparición. Cantor mismo enfrentó la primera paradoja a la que dio lugar su teoría de los agregados. Ésta consistía en lo siguiente: dada su definición de 'conjunto potencia' (el conjunto de todos los conjuntos de un conjunto dado), Cantor llegó rápidamente al resultado de que cualquier conjunto es estrictamente menor que su conjunto potencia y, por ende, que el conjunto universal, esto es, no era (contrariamente a su propia caracterización) el conjunto más grande que pudiera pensarse, el conjunto con todo lo que hay, puesto que resulta ser más chico que su conjunto potencia.[11] La consecuencia que normalmente gusta de extraerse es que hay más clases que cosas en el universo. Esto es sin duda una forma ingeniosa de decir algo, pero ¿qué? Si la idea implícita es que las clases son como cosas sólo que abstractas, entonces estaremos en medio del pantano de la mitologización filosófica en el ámbito de las matemáticas, que es precisamente lo que queremos evitar. A reserva de regresar sobre este tema más abajo, por el momento nos limitaremos a señalar que la implicación importante de la paradoja de Cantor pertenece a la teoría de los números y es simplemente que no hay tal cosa como el número natural más grande.[12] Como "resultado" a los matemáticos éste les podrá resultar

---

[9] H. Weil, "Mathematics and Logic", citado en Abraham A. Fraenkel y Yehoshua Bar-Hillel, *ibid*., p. 4.

[10] Confieso que no tengo ni la menor idea de qué se trataría de estar diciendo con esto.

[11] Imposible no ver el muy sugerente paralelismo con la así llamada "prueba ontológica" de san Anselmo en favor de la existencia de Dios, *i.e.*, la "prueba" de la existencia necesaria de un ser mayor que el cual ningún otro puede ser concebido).

[12] Más en general, que para cualquier número transfinito siempre habrá uno más grande.

fascinante, pero ello no impide que en el fondo sea algo de lo más trivial: a nadie en sus cabales se le ocurriría pensar que hay algo así como el número más grande de todos, puesto que de inmediato a uno se le ocurre que a ese número, sea el que sea, se le puede sumar 1 (o el número que sea) y que eso siempre podrá pasar con el número que sea cuantas veces uno quiera. De manera que lo que Cantor logró fue ofrecer una "demostración" matemática de eso que intuitivamente ya "sabe" quien usa nuestro sistema numérico, un sistema simbólico regido por una ley formal. Nótese que la prueba de Cantor pertenece a la clase de demostraciones que hace que los matemáticos exulten, pero que no siempre es comprendida: el resultado no es matemático sino metamatemático, mediante lo cual quiero decir, en un sentido amplio, 'semántico'. Lo que quiero decir es lo siguiente: el resultado de Cantor es una regla que vale en el conjunto de los números naturales de acuerdo con la cual no tiene sentido hablar del número mayor que todos. Lo que se nos está diciendo es que afirmar que *x* es el número mayor de todos es, en el contexto de la aritmética, emitir un sinsentido. Nadie tiene nada en contra de esto, pero lo que debería ser obvio es que no se trata, como en general se le interpreta, de un resultado referente a "cantidades".

Antes de discutir diversos aspectos de la teoría de conjuntos, consideremos rápidamente la versión clásica de la teoría. ¿Qué comporta? Están, como nociones no definidas, en primer lugar la crucial relación de pertenencia (simbolizada mediante '$\in$') y, por consiguiente, la noción de conjunto, entendida intuitivamente como agregado, colección, grupo o montón de elementos. En segundo lugar nos topamos con nociones de relaciones y de operaciones sobre o entre conjuntos, como la relación de inclusión ('$\subset$'), la de intersección ('$\cap$') y la de unión entre conjuntos ('$\cup$'). A partir de estas nociones se definen otras como "dominio", "conjunto potencia", "complemento", etc. Una vez más, es de primera importancia observar que la teoría de conjuntos por sí sola es totalmente estéril. Este simbolismo, considerado aisladamente, no pasa de ser un mero juego formal, entretenido quizá pero sin mayores implicaciones metafísicas. Para que la teoría de conjuntos pueda rendir los frutos que se esperan de ella tiene que venir acompañada de algo más. En el caso de los problemas relacionados con la fundamentación de las matemáticas este "algo más" es, como ya se dijo, la lógica. Así, al incorporarse a la lógica la teoría de conjuntos automáticamente incorpora o hace suyo el lenguaje de la lógica clásica, *i.e.*, la negación, los cuantificadores, las conectivas, la noción de identidad, etc., y, desde luego, las "verdades" de la lógica, las tautologías. La "teoría" de conjuntos, por consiguiente, es un cuerpo simbólico que se incrusta o monta en otros previamente existentes y aunque a partir de ese momento forma un todo sigue siendo conceptual y lógicamente distinguible de la lógica. El punto importante, empero, es que es dicha incrustación lo que automáticamente permite que se hable en relación con la teoría de conjuntos de “proposiciones” o de “verdades”.

Sin duda alguna el gran problema “teórico” (aunque me parecería más apropiado decir ‘técnico’) para la teoría de conjuntos desde el punto de vista de los matemáticos, los lógicos y los teóricos de conjuntos lo constituyeron las paradojas. En efecto, la teoría de conjuntos nació preñada del peor mal del que podría verse afectada una teoría (sobre todo si es formal): contenía o daba lugar a paradojas. Bertrand Russell mejor que nadie puso de relieve a través de su paradoja el hecho de que lo que se conoce como ‘teoría ingenua de conjuntos’ genera contradicciones y es por lo tanto, así como fue formulada por Cantor, inaceptable. Lo interesante de la paradoja de Russell referente a las clases que no son miembros de sí mismas es que concierne de manera obvia a la noción central de la teoría, esto es, la noción de clase o conjunto (aunque quizá también podría pensarse que es la noción de pertenencia la noción problemática). Dada la importancia de la observación de Russell, quizá valga la pena reproducir la paradoja, a pesar de que ha sido presentada y discutida un sinnúmero de veces.

La paradoja aparece como sigue: hay conjuntos que no son miembros de sí mismos. El conjunto de los ratones no es un ratón. Pero hay conjuntos que sí son miembros de sí mismos. El conjunto de todos los conjuntos de objetos que hay sobre el escritorio sí es un conjunto. Consideremos ahora el conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos y preguntémonos: ¿es ese conjunto miembro de sí mismo o no lo es? Si no lo es, por la definición misma del conjunto relevante, entonces sí es miembro de sí mismo, y si es miembro de sí mismo, entonces obviamente no es miembro de sí mismo. Así, el conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos es miembro de sí mismo si y sólo sí no es miembro de sí mismo.

La verdad es que ni siquiera es claro cuál es el diagnóstico apropiado de la paradoja porque, como insinué más arriba: ¿es la noción ingenua de clase la que vicia la teoría o no surge el problema más bien porque la relación de pertenencia no fue sometida a las restricciones apropiadas? Independientemente de la respuesta por la que uno se incline, ¿qué puede pensarse de una disciplina cuyas nociones fundamentales permite la gestación de contradicciones como la enunciada?

El primer gran esfuerzo por resolver el problema de las paradojas lo constituyó la teoría russelliana de los tipos lógicos,[13] de acuerdo con muchos un monumental esfuerzo técnicamente en última instancia fallido, entre otras cosas debido a la forzosa introducción de axiomas de carácter no lógico, como el axioma de reducibilidad. Esto es discutible, pero no entraré aquí en esa temática. Independientemente de ello, lo cierto es que la propuesta russelliana fijó en más de un sentido la pauta para la solución del problema, puesto que lo que dejó en claro fue que lo que había que hacerse era de alguna manera delimitar con precisión el alcance de las nociones relevantes. Esto fue precisamente lo que se logró cuando finalmente se pudo axiomatizar la teoría de conjuntos, labor realizada en primer término por Zermelo. Aquí, empero, se vuelven a plantear dificultades de comprensión. Al respecto, es menester hacer de inmediato una aclaración. Los matemáticos pueden quedar teóricamente satisfechos con sus soluciones "técnicas", esto es, con sus propuestas simbólicas que les permiten continuar desarrollando sus temas y sistemas, pero ni mucho menos significa eso que las "soluciones" en cuestión *ipso facto* acarreen consigo claridad conceptual respecto a lo que se está haciendo. Debería quedar claro de una vez por todas que desarrollo técnico o simbólico no significa ni implica ni acarrea claridad o transparencia conceptual. Esto es algo que es factible ilustrar copiosamente.

Si la solución para el problema de las paradojas fue la axiomatización, entonces nuestra pregunta ahora es: ¿qué es axiomatizar una teoría? La respuesta es simple, pero veamos rápidamente lo que nos dicen algunos expertos. Fraenkel y Bar-Hillel, por ejemplo, afirman que "En general, se construye un sistema axiomático para axiomatizar (*sic*. ATB) una cierta disciplina científica previamente dada de una forma pre-científica, 'ingenua' o 'genética'. Se supone que los términos primitivos, no definidos del sistema denotan algunos de los conceptos tratados en esta disciplina, en tanto que los términos que denotan a los conceptos que quedan son introducidos en el sistema por definición. Se supone que los axiomas del sistema están en lugar de los hechos acerca de esos conceptos, en tanto que otros hechos están expresados por los teoremas, *i.e.*, los enunciados que pueden derivarse de los axiomas sobre la base de la disciplina subyacente".[14] Dejando de lado el detalle de que "se axiomatiza para axiomatizar", la idea en sí misma es bastante simple, por no decir pueril: se

---

[13] De hecho, Russell en *Los Principios de las Matemáticas* ofreció no una sino tres propuestas de resolución de las paradojas: la que finalmente él mismo favoreció y desarrolló a fondo en *Principia Matemática* (junto con A. N. Whithead), *i.e.*, la teoría de los tipos lógicos, la teoría del zigzag y la teoría de la limitación de las clases.

[14] Abraham A. Fraenkel y Yehoshua Bar-Hillel, *op. cit.*, p. 27.

eligen ciertos términos que se introducen sin definir, que, por así decirlo, se comprenden "intuitivamente", los cuales son los términos primordiales de la teoría, y se eligen ciertas proposiciones que dan la impresión de ser fundamentales, mientras menos mejor; posteriormente se definen todos los demás términos de la teoría y se extraen todos los teoremas que sea posible extraer mediante reglas de inferencia cuya validez haya quedado previamente establecida. Así, pues, lo que se logró con la teoría de conjuntos, con algunas dificultades nunca resueltas de manera del todo satisfactoria, utilizando para ello la lógica, fue precisamente axiomatizarla. En este sentido, parecería que si hay algo en los fundamentos de la teoría de conjuntos es la lógica.

En resumen: la teoría de conjuntos es un simbolismo formal, dotado de un vocabulario propio y de reglas particulares, que permite manejar con fluidez los sistemas matemáticos. Es, pues, como un lenguaje para las matemáticas, puesto que permite la formulación de sus teoremas, resultados, etc., de forma más transparente. En este sentido, probablemente tiene efectos no de resolución de problemas pero sí de aceleración para encontrar resultados satisfactorios. Puede, pues, afirmarse que, en este sentido al menos, el programa logicista triunfó. Lo que a menudo se hace es traducir oraciones matemáticas al lenguaje de la lógica enriquecida con la teoría de conjuntos y se asume que eso se puede hacer en cualquier ámbito de las matemáticas. Es en este sentido que puede afirmarse que la teoría de conjuntos y la lógica "fundamentan" las matemáticas. Ahora bien, si esto es cierto lo que parece seguirse es que es simplemente un error de nomenclatura hablar de "teoría" cuando nos referimos a la teoría de conjuntos. Debería hablarse más bien de "técnica conjuntista" o de "instrumental conjuntista". Pero nada de lo que se ha dicho permite inferir que la teoría de conjuntos versa sobre algo, que sea acerca de algo. Desde mi punto de vista, la mejor forma de presentar la idea es diciendo que la teoría de conjuntos ni versa ni no versa sobre nada, más o menos en el mismo sentido en que lo mismo podría aseverarse de la gramática castellana.

La filosofía de las matemáticas no tiene absolutamente nada que decir sobre resultados, preferencias axiomáticas, demostraciones, etc., pero sí respecto a lo que se afirma en relación con ellas. El material de trabajo para el filósofo de las matemáticas no son las matemáticas, sino lo que los matemáticos dicen acerca de su disciplina. Esto no es algo particularmente difícil de comprender. Lo que sucede es que es sobre la base de sus tecnicismos, en este caso de los de la teoría de conjuntos, que matemáticos y filósofos hacen inferencias fantásticas y extraen increíbles (y hasta podría decirse, ininteligibles) conclusiones metafísicas, hablan de visiones de mundos puramente inteligibles, de entidades que desbordan nuestra imaginación, y así sucesivamente. Nuestra perspectiva general es que todas esas pretensiones filosóficas (no teóricas) por parte de los matemáticos o de los matemáticos filósofos se fundan las más de las veces en profundas incomprensiones acerca de su propia labor y de su propio simbolismo. Veamos rápidamente algo en este sentido, recordando una vez más que no forma parte de nuestra labor hacer demostraciones o presentar nuevos resultados, sino contribuir a la comprensión genuina de lo que se hace, para lo cual (por lo menos en un primer acercamiento) consideraciones en un nivel básico son suficientes.

V) ***Comprensión e Inteligibilidad en Teoría de Conjuntos***

Consideremos en primer lugar la concepción más usual de los conjuntos, esto es, la así llamada 'concepción iterativa'. De acuerdo con ésta, un conjunto se compone de sus miembros y no es nada por encima de ellos.[15] Esta caracterización suena plausible, pero de inmediato surge una dificultad: ¿cómo se le aplica al conjunto vacío? Aquí el problema es que si bien los teórico-conjuntistas pueden sin problemas designar mediante 'Λ' el conjunto vacío, hablar de él, hacer operaciones con dicho signo, manipularlo como si fuera una entidad especial, etc., de todos modos con ello no se responde a la inquietud conceptual planteada. ¿O acaso no se tiene derecho a preguntar: '¿cuáles son los elementos del conjunto vacío?'? En todo caso necesitamos una aclaración de por qué, además de impertinente, es esta pregunta ilegítima. Los matemáticos, duchos en eludir por medio de tecnicismos dificultades como esta, se las arreglan para ofrecer una caracterización que formalmente les permite seguir adelante. El precio, sin embargo, es que aparte de las operaciones que permite efectuar no se tiene ni idea de qué es lo que se está haciendo. Entiéndase bien a lo que aspiramos: no estamos tratando de desechar o de deshacernos de la idea de conjunto vacío. Eso sería simplemente demencial. Es obvio que el conjunto vacío es esencial en el simbolismo y permite expresar múltiples ideas. Sirve, por ejemplo, para definir el cero, el cual queda definido como el cardinal de todos los conjuntos equipotentes al vacío. Obviamente, empero, el mero manejo de 'Λ' no equivale a una aclaración, que es lo que nosotros demandamos. En todo caso, lo

[15] De acuerdo con la concepción iterativa de los conjuntos, éstos se obtienen a partir de la aplicación reiterada de ciertos principios de formación, dando lugar a una jerarquía infinita en la que no hay un nivel último o final. El "universo" conjuntista en esta concepción es un universo abierto de entidades abstractas, esto es, los conjuntos, y es "abierto" en el sentido de que no queda nunca completado.

que no se debería pasar por alto es el hecho de que con lo que nos la estamos viendo aquí es básicamente con convenciones simbólicas.

En relación con la idea de conjunto vacío, mi punto de vista es el siguiente: desde luego que dicha noción (designada por ‘Λ’) es una noción importante y legítima, pero su comprensión no es la que los partidarios de la teoría de conjuntos proponen. Lo que éstos proponen es simplemente una lectura del simbolismo que es filosóficamente primitiva. Para evitar la confusión filosófica lo que hay que hacer aquí es atender al funcionamiento del signo en su contexto natural, esto es, “teórico”. Nuestra pregunta no es: ¿qué designa o nombra ‘Λ’?, puesto que la nada no es algo que se pueda designar, sino ¿para qué sirve ‘Λ’? O sea, lo que es preciso entender es que ‘Λ’ no fue introducido (por así decirlo) nominalmente, esto es, como el nombre de una entidad abstracta, sino más bien **operacionalmente**. Es, pues, como un signo que si nombra algo, lo que nombra es el resultado de una operación, puesto que es a ella que alude y es en conexión con ella como se le debe entender. No hay nada más por encima de eso. Por otra parte, es evidente que un signo así es requerido, puesto que es obvio que, una vez establecido el simbolismo, hay un sinfín de operaciones que no dan nada como resultado o que simplemente no se pueden realizar y es justamente para indicar **eso** que se habla de “conjunto vacío”. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$, la operación de intersección de A con B no da como resultado nada, puesto que A y B no tienen ningún elemento en común. En signos, $(A \cap B) = \Lambda$; o bien Λ puede servir para anular una intersección, como por ejemplo en $(A \cap \Lambda) = \Lambda$. Si no se tuviera un signo como ‘Λ’ no se podría expresar nada eso que estamos diciendo y muchas cosas más. No se trata, por lo tanto, de entrar en controversia con la “teoría” misma, como si lo que pretendiéramos hacer fuera rechazar algunos de sus “resultados”. Lo que nos importa es despejar la neblina de la incomprensión filosófica, la cual afecta tanto a filósofos como a matemáticos, a lógicos y a teórico-conjuntistas. En este caso, el problema filosófico surge cuando Λ queda reificado por una lectura sustancialista, en este caso paradójica en grado sumo, puesto que convierte al conjunto vacío en un algo, inevitablemente misterioso, con el cual sin embargo posteriormente se puede trabajar, tratar como una entidad, etc. De ahí que a menudo se nos enfrente con dilemas como el siguiente: o se acepta la existencia (en el sentido realista) del conjunto vacío o se rechaza una técnica que todos aceptan. Pero es obvio que se trata de un falso dilema, puesto que la interpretación usual es un absurdo total, inclusive si es inducida por el simbolismo y que se nos aparece como la más “natural”.

Las ideas de conjunto y de pertenencia en sí mismas no son particularmente misteriosas o problemáticas, pero se transforman en eso precisamente en manos de los matemáticos y los lógicos. Considérese la idea de conjunto: ¿qué hay de complejo, raro, misterioso o problemático con la idea de montón, de agrupación o de colección? Nada. El problema aparece, primero, porque la idea de montón es una idea empírica, la cual sin embargo es abruptamente trasladada al contexto de las ciencias formales, y, segundo, porque Cantor (seguido en esto por todos) transforma $\aleph_0$ en un número, *viz*., el primer número transfinito. Así, dado que $\aleph_0$ es visto como un número y al mismo tiempo como la cardinalidad de la clase de los números naturales, súbitamente nos topamos con la idea de que los números son acumulaciones de conjuntos y que los conjuntos son entidades! Resulta entonces prácticamente imposible eludir la idea de que el "universo conjuntista" es el resultado de una acumulación fantástica, sin fin, de entidades abstractas poblando a su manera el universo (y más allá!). Es de lo más natural entender '$\in$' no como un operador, sino como indicando que hay algo que de hecho le pertenece a otra cosa y, por consiguiente, es fácil ceder a la idea de que tanto elementos como conjuntos, de uno u otro modo, ya "están allí". Así se genera el cuadro tradicional del "universo conjuntista", esto es, una de las más dañinas mitologías filosóficas jamás ideada.

Si por un momento nos olvidamos de que nos encontramos en un ámbito de importancia vital para el conocimiento, podríamos suponer que la teoría de conjuntos es un mero instrumento formal, un juego formal que, sin embargo, puede inesperadamente tener consecuencias desagradables, puesto que puede permitir que se gesten en su seno contradicciones. Así entendida la teoría, la axiomatización no es entonces un esfuerzo por enunciar "hechos" acerca de nada, sino un esfuerzo por normar o reglamentar el juego en cuestión de manera precisamente que no surjan contradicciones. Se trata de caracterizar nuestras nociones, los dominios, las extensiones, etc., de modo que pueda operarse con las nociones requeridas sin que esté presente siquiera la posibilidad lógica de una contradicción. A esto no hay absolutamente nada qué objetar. Parte del problema radica en que los matemáticos no han podido construir un juego perfecto. Esto no es muy difícil de mostrar. El proyecto mencionado de reglamentación es algo que, por ejemplo, A. Fraenkel llevó a cabo, sólo que su éxito no fue completo o total. La razón es que Fraenkel se vio forzado a introducir "axiomas" que en la lectura tradicional se ven como teniendo "compromisos ontológicos". Eso es lo que pasa con, por ejemplo, su Axioma VI, *i.e.*, el famoso Axioma de Elección. Éste no es una mera definición ni es una consecuencia de definiciones, sino que constituye una afirmación de naturaleza debatible. Los lógicos lo presentan como un “axioma”, en el sentido de verdad indemostrable, pero (como veremos) una vez más es cuestionable que sea ese su verdadero *status*. Intentemos aclarar esto último.

Lo que por medio del famoso Axioma de Elección se afirma es que si tenemos una colección infinita de conjuntos ajenos, esto es, que no tienen elementos en común, entonces podemos elegir o seleccionar un elemento de cada uno de dichos conjuntos y formar así un nuevo conjunto.[16] Ahora bien ¿cuál es el *status* del axioma? La respuesta, por sorprendente que parezca, es que ello depende del contexto en que se aplique. Es evidente que si la colección de conjuntos que se considera es finita, entonces no hay ningún problema: en el momento en que hacemos la selección construimos el conjunto que requerimos. En ese caso, el Axioma de Elección es pura y llanamente redundante. Queda demostrado, por así decirlo, empíricamente y en el fondo no es más que una trivialidad. El problema, sin embargo, se plantea cuando, como tan a menudo en matemáticas, se quiere hablar de colecciones o conjuntos o clases infinitas. Lo que se nos dice es que no podemos demostrar que el axioma es verdadero por la simple razón de no se puede literalmente construir el nuevo conjunto que nos interesa ya que es lógicamente imposible que terminemos de recorrer la colección infinita de conjuntos ajenos a partir de los cuales tendríamos que hacer nuestra selección de elementos para el nuevo conjunto. La “solución” de los matemáticos consiste entonces en decir que lo más que se puede hacer es asumir, *i.e.*, “presuponer” que lo que el axioma asevera es factible o realizable. Como ya se demostró que el axioma es indispensable para ciertas demostraciones y es también independiente del resto de los axiomas de la teoría de conjuntos (y, por lo tanto, no lleva a contradicciones), entonces cómodamente se le asume como “verdadero”. Así entendido, el axioma de elección es una verdad sintética *a priori*, una de esas verdades que sólo Dios puede establecer, etc., etc. Pero ¿es realmente ello así?

A mí me parece que el axioma tiene otra lectura. No es una verdad, sino una simple regla para los sistemas numéricos. Es en este sentido semejante a la aseveración de que no puede haber (“existir”) un número que sea el más grande de todos. Pero además hay otro problema: se nos dice que el axioma es indemostrable porque no podemos asegurar que efectivamente “existe” o “hay” la función de selección cuando el número de conjuntos involucrados es infinito. Pero si es el carácter infinito lo que es problemático: ¿por qué entonces se acepta

[16] O, lo que es equivalente, que si cada uno de los conjuntos en cuestión no es vacío, entonces su producto cartesiano tampoco lo es.

sin cuestionar en el planteamiento mismo del problema que **tenemos** un conjunto infinito de conjuntos ajenos? ¿Por qué es la función infinita problemática, pero no el conjunto infinito sobre el que supuestamente se ejercería? Nótese que no estamos cuestionando la utilidad del axioma para el desarrollo de la teoría (y de las matemáticas en general), sino su interpretación. En general, dicho sea de paso, quienes aceptan el Axioma de Elección (Fraenkel, por ejemplo) no dicen sobre él nada nuevo ni avanzan un ápice frente a lo argumentado, hace 90 años, por Bertrand Russell.

Desde luego que las discusiones referentes a la existencia de las clases, la aritmética transfinita, los conjuntos inaccesibles y demás temas propios de la "teoría" se pueden complicar tanto como uno quiera. Entran en juego para ello multitud de cuestiones, tanto lógicas como filosóficas, que sería ridículo pretender considerar en un trabajo meramente aproximativo y programático como este. En verdad, lo único que hemos intentado hacer ha sido llamar la atención sobre la posibilidad de "leer" la teoría de conjuntos de un modo diferente al usual, motivados para ello por el obvio fracaso explicativo de las concepciones filosóficas en circulación. Naturalmente, la realización de nuestro "programa" exigiría que se reinterpretara el todo de la "teoría" en concordancia con sus lineamientos, lo cual es algo que obviamente rebasa el marco de nuestras posibilidades en este ensayo. Por ello, y para terminar, intentaré presentar, de manera global y a grandes brochazos, un cuadro diferente, admitiendo de entrada que hace falta muchísima argumentación para acabarlo y para dejarlo sólidamente asentado.

VI) *Una Visión Alternativa*

Pienso que lo primero que se tiene que hacer es detectar el error básico en la concepción usual de la teoría de conjuntos para poder diagnosticar el mal y posteriormente intentar remediarlo. Lo que a mi modo de ver está en la raíz de la visión distorsionada de la teoría de conjuntos que a menudo se nos invita a compartir es simplemente lo que podríamos llamar 'primitivismo filosófico'. Wittgenstein describió atinadamente el fenómeno en unas cuantas palabras como sigue: "Cuando hacemos filosofía somos como salvajes, como gente primitiva que oye las expresiones de los hombres civilizados, las mal interpretan y luego extraen las más extrañas conclusiones a partir de ellas".[17] Lo que él dice, obviamente, se aplica por igual a la filosofía de las matemáticas. El primitivismo

[17] L. Wittgenstein, *Philosophical Investigations*, sec. 194.

filosófico al que alude consiste básicamente en interpretar los significados de los signos, en el ámbito lingüístico que sea, desde la perspectiva de la gramática superficial, esto es, en función de las categorías gramaticales comunes, y no desde el punto de vista de su aplicación. Y lo que se tiene que entender es que la descripción del uso de un signo y la descripción de su significatividad desde el punto de vista de la gramática superficial las más de las veces son simplemente incompatibles y llevan a resultados completamente diferentes. El problema, claro está, es que como la gramática se nos impone de inmediato, en este, como en prácticamente todos los casos, el intento por liberarse de los engañosos mitos de la filosofía nos fuerza a ir en contra de la corriente.

Una pregunta clave, por consiguiente, es: ¿para qué sirve la teoría de conjuntos, esto es, qué problemas se superan o se resuelven por medio de ella? ¿Qué se obtiene gracias a ella? La respuesta es variada, lo cual deja ver su riqueza hermenéutica. Para empezar, es claro que gracias a la teoría de conjuntos (más la lógica) se logra una efectiva aclaración conceptual de las matemáticas: se pueden definir todas las nociones y las operaciones matemáticas y presentar sus principios fundamentales. Esto, a no dudarlo, es un gran logro técnico. Como consecuencia de lo anterior, la teoría de conjuntos se constituye en una especie de código abstracto que resulta fácilmente utilizable a todo lo largo y ancho de las matemáticas: es un lenguaje para la geometría, el análisis, la aritmética, etc. Esto permite uniformizar el trabajo matemático, pues se dispone de un formalismo más amplio que permite una más fácil manipulación. Un formalismo así permite realizar "traducciones" de los lenguajes matemáticos y visualizar mejor el estado de la disciplina. Por otra parte, es claro que con un instrumental así el progreso en matemáticas se vuelve más fácil de visualizar, es decir, el trabajo matemático se simplifica. Así, por ejemplo, si una oración cualquiera O es indemostrable en teoría de conjuntos, entonces automáticamente sabemos que su traducción matemática, X, es indemostrable. Y a la inversa. Esto, sin embargo, no significa que si no se hubiera tenido O, entonces tampoco se habría podido demostrar X. No es que O fuera indispensable para X, sino simplemente que la demostración de O ahorra trabajo. Asimismo, y esto es muy importante, por medio de la teoría de conjuntos (junto con la lógica, desde luego) se pueden enunciar los principales principios y reglas ("axiomas") que de hecho rigen la expansión o el desarrollo de los sistemas numéricos. Desde este punto de vista, los principios de la teoría de conjuntos no son otra cosa que las reglas de uso (esto es, de gramática en profundidad) de los signos matemáticos; nos indican cómo se opera con ellos en un determinado contexto matemático, así como la clase de inferencias que está permitida o proscrita. Las discusiones acerca de los axiomas son discusiones acerca de lo que es legítimo hacer y no hacer en matemáticas, no descripciones de nada. Cabría, pues, decir que hay un sentido en el que la teoría de conjuntos es simplemente la matemática (la gramática) de las matemáticas. Lo que nos da es, entre otras cosas y para decirlo a manera de slogan, la lógica del número.

Lo anterior es importante porque hace ver que todas las discusiones de carácter ontológico en torno a las clases, el infinito, etc., son precisamente el resultado de incomprensiones de la lógica del número. La teoría de conjuntos no acarrea consigo ninguna "ontología", entre otras razones porque no es una teoría sino meramente el sistema de reglas que componen la compleja y sumamente abstracta gramática de las teorías numéricas. De hecho, en teoría de conjuntos no aparece la noción de verdad; para ello requiere de la lógica. A final de cuentas, todo en teoría de conjuntos es asunto de definiciones y de deducciones y, cuando ello no es posible, entonces se introducen axiomas que sirven para regular el formalismo sobre el que se está operando. Esto es algo que con toda claridad ponen de relieve, por ejemplo, las discusiones en torno al axioma de comprensión: lo que se hace es debatir acerca del modo como se va a considerar aceptable que una función proposicional determine o no un conjunto. Por razones de sobra conocidas, se llegó a la conclusión de que expresiones de la forma 'F(F)' no se admiten y punto. Pero debería quedar claro que dicho "resultado" no es otra cosa que el resultado de una decisión, una estipulación. Discutir sobre la potencial existencia o no existencia de una función o de un conjunto es discutir sobre la conveniencia de aceptarlos o rechazarlos en función de la congruencia con el cuerpo de resultados ya disponible y con las eventuales consecuencias de su aceptación (o de su rechazo). Pero todo esto es, en última instancia, una cuestión de estipulaciones, de reglas, de definiciones, de convenciones. Desde esta perspectiva, lo más grotesco que puede hacer el lógico-matemático-conjuntista-filósofo es verse a sí mismo como un osado explorador cósmico hablándonos de realidades nunca antes soñadas por nadie. Es justamente contra esta clase de delirios que va dirigida la línea de argumentación que aquí hemos meramente esbozado.

En resumen: la teoría de conjuntos no es una teoría matemática más, ni siquiera una rama de las matemáticas, puesto que no trabaja con números. Más bien, versa sobre números. La teoría en cuestión trabaja con conjuntos y pertenencia a conjuntos y estas nociones en sí mismas no son numéricas, sino que sirven para interpretar las "entidades matemáticas". De hecho, no parece ser del todo coherente sostener que la teoría de conjuntos es al mismo tiempo dos cosas, una rama de las matemáticas y los fundamentos de las matemáticas.

Nosotros nos inclinamos por lo segundo, dándole a ello desde luego una interpretación acorde a la posición global que hemos venido delineando. Lo que por medio de la teoría de conjuntos se logra es simplemente poner orden en el mundo de los números, sobreponiendo un único formalismo sobre toda la gama de formalismos matemáticos. Muchos problemas de comprensión, sin embargo, surgen precisamente porque en general se entremezclan dichos simbolismos y se les trata como si fueran lógicamente uno solo. Parte de nuestra labor ha consistido en señalar que son discernibles o separables. Después de todo, siempre tendremos derecho a preguntar: a final de cuentas: ¿qué tiene de matemática la teoría de conjuntos, que tiene de matemático '$\in$' o qué tiene de numérico el infinito? A lo que preguntas así apuntan es a la idea de que la así llamada 'teoría de conjuntos' no es más que una interpretación de lenguajes numéricos y de estructuras algebraicas, pero justamente así como una interpretación de la física no implica que se nos esté con ello dando una nueva teoría física, una interpretación de las matemáticas no implica una nueva teoría **matemática**. Nuestra conclusión, por lo tanto, es la ratificación de la intuición con la que iniciamos este ensayo, a saber, que hablar de "teoría" cuando se habla de "conjuntos" es de entrada nombrar y describir mal el caso. Sería mucho más fructífero y nos evitaríamos múltiples dolores de cabeza si entendiéramos que la mal llamada 'teoría de conjuntos' no es sino un simple pero potentísimo instrumental formal, sumamente maleable y que permite el tratamiento sistemático de otro instrumental formal, *viz.*, el de las matemáticas. Naturalmente, quien se empeñe en seguir hablando de mundos extraños y de visiones fantasmagóricas en relación con lo que a final de cuentas no es sino un instrumental para un instrumental está, desde luego, en libertad de hacerlo.