Gödel y Wittgenstein[1]

I) *Auto-referencia y Significatividad*

La auto-referencia es un fenómeno lingüístico a la vez común y nada fácil de explicar. Su carácter engañoso brota, entre otras cosas, del hecho de que de manera imperceptible se puede transitar de formas legítimas de auto-referencia, que son en ultima instancia comprensibles, explicables, justificables o redundantes, a formas ilegítimas, que finalmente nos dejan en la perplejidad y en el misterio y que son todo menos fáciles de descartar. La auto-referencia ilegítima está vinculada a las paradojas y se sabe cuán difícil es dar cuenta de éstas. De ahí que resulta de vital importancia aprender a diferenciar entre auto-referencia legítima y auto-referencia paradójica, pues de lo contrario no podremos evitar incomprensiones y enredos de diversa índole y estaremos tratando de aplicar a toda costa soluciones que valen para la auto-referencia paradójica a casos de auto-referencia que en el fondo no son problemáticos y que, por lo tanto, no las requieren. Por otra parte, sería muy aventurado determinar de entrada que toda forma de auto-referencia es paradójica y, por ende, falaz. Si se acepta, aunque sea tentativamente, la distinción entre auto-referencia legítima y auto-referencia espuria podremos aceptar que hay casos de auto-referencia falaz, para los cuales habrá que recurrir a los mecanismos usuales de bloqueo de formación de paradojas, y casos de auto-referencia legítima, como supuestamente acontece (así piensan muchos) con el teorema de incompletitud de Gödel, que *prima facie* serían perfectamente inteligibles. Por mi parte, admito que hay formas legítimas de auto-referencia, si bien muy probablemente éstas sean en última instancia, como sugerí más arriba, redundantes. Ahora bien, si fórmulas como la del teorema de Gödel, que se refieren a sí mismas para, en cierto sentido, auto-descalificarse, caen bajo la categoría de auto-referencia legítima o no es algo sobre lo cual por el momento no me pronunciaré más que tangencialmente. Lo que por lo pronto haré será iniciar mi exposición ilustrando mediante ejemplos casos simples pero legítimos de auto-referencia, esto es, casos que precisamente por ser legítimos no son paradójicos y, por lo tanto, son en principio dispensables. De esta manera podremos desproveer al fenómeno lingüístico de la auto-referencia de toda aura de misterio y estaremos en una posición más ventajosa para comprender mejor el logro de Gödel.

[1] Agradezco a los Dres. José Antonio Robles (IIF) y Guillermo Morales Luna (CINVESTAV) las útiles observaciones que le hicieron a una primera versión de este trabajo. Naturalmente, ningún error que el ensayo contenga es adjudicable a ellos.

Pienso que, en principio, es en relación con dos "cosas" que podemos hablar de auto-referencia:

a) personas o hablantes
b) oraciones (o, eventualmente, proposiciones)

Consideremos primero a los hablantes. Normalmente, empleamos el lenguaje para hablar del mundo, sólo que el lenguaje se presta a usos que podríamos calificar si no de anómalos por lo menos sí de especiales. La auto-referencia en este sentido es especial, porque a primera vista parece ser un mecanismo lingüístico, por lo menos las más de las veces, enteramente redundante. En efecto, si soy yo quien habla, mis interlocutores de manera natural se percatan de ello, pero entonces ¿para qué tengo que indicar que efectivamente soy yo quien habla? Ello no parece particularmente sensato. Y si, por otra parte, no estoy interesado en informar a nadie de que soy yo quien habla: ¿tendría algún sentido que yo me proporcionara a mí mismo la información de que soy yo quien está hablando? Esto no es sólo insensato, sino francamente absurdo. A primera vista, por lo tanto, la auto-referencia personal parece ser un mecanismo lingüístico que está de más.

No obstante estas suspicacias, puede afirmarse que hay contextos lingüísticos en los que la auto-referencia está plenamente justificada. Daré un ejemplo. Supongamos que paso junto a un grupo de individuos que hablan de mí sin conocerme personalmente (digamos que no me conocen "*by acquaintance*"). Imaginemos que alguien afirma de mí que soy italiano y que entonces yo intervengo y digo: 'No, Alejandro Tomasini no es italiano. Es mexicano'. Es éste un caso de auto-referencia perfectamente comprensible y justificada en la que ATB habla de ATB. Es debido a que es relativamente fácil construir ejemplos así que resulta inaceptable pretender descalificar *a priori* como un movimiento lingüístico ilegítimo **todo** acto de auto-referencia. De hecho, podemos afirmar que hay situaciones especiales en las que ese movimiento lingüístico está no sólo permitido, sino que es el apropiado; una situación particular lo justifica. En este caso, la auto-referencia se justifica por el hecho de que los hablantes no han visto nunca a la persona de la que hablan y que ésta no quiere darse a conocer. De lo contrario, siguiendo con el ejemplo, lo que yo tendría que decir sería simplemente algo como 'No, yo soy mexicano, no italiano' y el recurso a la auto-referencia sería innecesario. Como moraleja general podemos extraer la idea de que tan absurda como la descalificación total de la auto-referencia es pensar que porque en una ocasión especial la auto-referencia personal es comprensible y está justificada, entonces lo está en todo momento y en cualquier circunstancia.

Otro caso de situación en el que la auto-referencia resulta ser un movimiento lingüístico legítimo (si bien es debatible si lo es moralmente) es el siguiente: imaginemos que alguien se auto-dota de una importancia desmedida al grado de que empieza a hablar de sí mismo en tercera persona. Podría tratarse, *e.g.*, de un déspota, de un artista o de un farsante. Una persona así podría decir: 'XYZ no dijo eso' o 'XYZ opina que ...', cuando 'XYZ' es el nombre de la persona que habla. En casos así y precisamente por ser de alguna manera anómalos, la auto-referencia es comprensible (inclusive si constituye una forma de hablar un tanto ridícula o despreciable). En todo caso, el ejemplo hace ver que, salvo en situaciones excepcionales o raras, la auto-referencia sencillamente no es la forma normal de hablar.

Un ejemplo más debatible de auto-referencia nos lo proporciona el hablante deseoso de llamar la atención y de presentarse "de cierta manera". Es el caso de alguien que dice "Yo soy el mejor futbolista" o "yo soy la mejor actriz". A primera vista, nos las habemos aquí con casos permisibles de auto-referencia: aparentemente, en efecto, alguien habla de sí mismo (o de sí misma) y lo que dice es comprensible, inclusive si es falso. Empero, es debatible que sea ésta una presentación adecuada de la situación. Lo primero que habría que señalar es que se trata más bien de casos de auto-descripción y es claro que auto-referencia y auto-descripción no son lo mismo; en segundo lugar, habría que señalar que si bien el mecanismo de auto-referencia en casos así no es gratuito, tampoco es indispensable. Se recurre a él por alguna razón que, al hacerla explícita, aclara en qué consiste su utilidad. Por ejemplo, el hablante quiere o necesita presentarse ante sus interlocutores de cierta manera, bajo cierta luz de modo que su persona se vea favorecida, para ser evaluado de tal o cual modo, etc. Es para no tener que estar constantemente haciendo explícito todo lo implícito en los objetivos del hablante que la auto-referencia puede ser un mecanismo lingüístico útil. Pero podemos ir más allá y argumentar plausiblemente que una expresión como 'yo soy el mejor alumno de mi clase' en realidad equivale a algo como 'en la lista de los alumnos y desde el punto de vista de las calificaciones el primer lugar es XYZ' y esto último no es un acto de auto-referencia, sino una simple descripción de una determinada situación de la cual uno forma parte. En general, puede afirmarse que sería un error inmenso pensar que mero uso de 'yo' o de mi nombre basta para que estemos frente a casos de auto-referencia. La auto-referencia no es tanto un asunto de gramática como de lo que podríamos denominar 'intención semántica'. Es ésta la que en algún sentido es sospechosa o "anormal", no las oraciones en las que aparece el pronombre personal. Así, concediendo en aras de la argumentación que este último ejemplo es efectivamente uno de auto-referencia, lo que habría que inferir es que inclusive cuando ésta es legítima e inocua, de todos modos es en cierto sentido redundante y reemplazable. Se trata, en el mejor de los casos, de un mecanismo que facilita la comunicación, porque permite obviar partes del trasfondo de las "intenciones del hablante". Todo esto permite entrever algo importante, a saber, que lo realmente extraño y problemático es la auto-referencia, por así llamarla, "pura", esto es, los actos de auto-referencia que no son sustituibles por ningún otro acto de habla y por medio de los cuales no se cumple con ninguna función lingüística específica aparte de la de auto-referencia.

Hay otras formas de discurso legítimas y mucho más usuales que sólo aparentemente son de carácter auto-referencial, con las cuales sin embargo fácilmente se les puede confundir. Tengo en mente los casos de expresión (de dolor, de sentimientos, de emociones, de recuerdos, etc.). Me refiero, en general, a situaciones en las que lo que se emplean son verbos psicológicos y actitudes proposicionales. En efecto, a primera vista parecería que si digo, por ejemplo, 'yo tengo un dolor en el brazo' expreso lingüísticamente mi dolor y, tácita o abiertamente, me apunto a mí mismo. O si digo 'yo recuerdo que ...', da la impresión de que tanto expreso un recuerdo como hablo de mí, esto es, indico que soy yo quien lo "tiene". En otras palabras, parecería que en una oración de forma tan simple como 'yo pienso que ...' hago simultáneamente dos cosas: hago explícito un pensamiento y al mismo tiempo me refiero a mí mismo ("a mí"). Es evidente, sin embargo, que la explicación de esos movimientos lingüísticos en términos de auto-referencia está totalmente desencaminada. De hecho, es fácil hacer ver que en la auto-adscripción de sensaciones, emociones, pensamientos y demás, la alusión a un "yo" que "tiene" determinados "estados mentales" es, además de gratuita, enteramente errada. Si alguien exclama: "Sí, pero es **a mí** a quien le duele", lo que quiere decir es algo como "este dolor que está aquí es muy intenso", "el dolor está aquí" (y señala uno dónde le duele), "claro, no eres tú quien lo padece", etc. Por consiguiente, podemos aseverar con confianza que en los casos de verbos psicológicos y de actitudes proposicionales simplemente no se produce ningún acto de auto-referencia. Esto está conectado con otro punto de vital importancia, en relación con el cual haré tan sólo unos cuantos recordatorios.

La ilusión de auto-referencia en los casos de verbos psicológicos y actitudes proposicionales brota del uso del pronombre personal 'yo' y sus derivados ('me', 'a mí', etc.). ¿Por qué, como dije, se trata de una ilusión? Wittgenstein aclaró de una vez por todas el tema: en estos casos nos las habemos con el uso de 'yo' **como sujeto** y una de las características de dicho uso es precisamente el no tener carácter referencial. Como bien se nos hace notar en las *Investigaciones*, "'Cuando digo "tengo un dolor" no señalo a una persona que tiene el dolor, puesto que en cierto sentido no tengo idea de *quién* sea'"[2]. La verdad es que no podemos ya seguir asumiendo que hay tal cosa como un "yo" que "tiene" sensaciones o pensamientos.

[2] L. Wittgenstein, *Philosophical Investigations* (Oxford: Basil Blackwell, 1974), sec. 404.

'Yo', en los casos en los que no es usado para referir al cuerpo, sencillamente **no** refiere o no denota nada. Su función es otra. Esto es digno de ser tomado en cuenta, por la sencilla razón de que entra en conflicto con una larga y ya no tan venerable tradición filosófica que sostiene precisamente lo contrario, a saber, que 'yo' siempre tiene un uso referencial. No entraré aquí en esta discusión, entre otras razone porque ya la he considerado ampliamente en otros trabajos[3] y no tengo nada nuevo qué decir al respecto. Empero, me permitiré señalar rápidamente un par de rarezas asociadas con la convicción tradicional.

En lo primero que habría que reparar al considerar la supuesta referencia o denotación de 'yo' usado como sujeto es en la ociosidad y en la futilidad de la empresa: ¿con qué objeto, para obtener qué estaría uno constantemente auto-identificándose, esto es, refiriéndose a sí mismo? ¿Qué ventaja para la comunicación ofrecería semejante proceder? Por otra parte ¿cómo dar cuenta de manera plausible del notorio fracaso en encontrar empíricamente la supuesta referencia? ¿Hay acaso algo más difícil que encontrarse a sí mismo, en el sentido de la metafísica tradicional? ¿Hay alguna tarea frente a la cual nos encontremos tan desorientados respecto a cómo proceder como la de buscarnos a nosotros mismos, cuando lo que buscamos es el legendario sujeto de las experiencias? Y ¿no es increíble que no haya nada tan difícil como encontrarnos a nosotros mismos, cada quien en su propio caso, desde luego? Por otra parte, si nadie ha logrado realizar la proeza de auto-atraparse: ¿no se debe ello acaso a que se está buscando algo que era lógicamente imposible obtener? ¿No es obvio, una vez hechas las aclaraciones pertinentes, que no hay nada qué buscar, y por lo tanto nada que encontrar, al usar 'yo' como sujeto? ¿No es evidente que no puede haber actos de auto-referencia cuando no hay entidad alguna que esté en juego? Infiero de todo lo anterior que, en tanto que mecanismo lingüístico útil y justificado por situaciones especiales, la auto-referencia personal no tiene nada de fantástico o de inexplicable y que es sólo cuando está involucrada una confusión filosófica, *i.e.*, la idea metafísica de auto-referencia y auto-conocimiento, que la auto-referencia personal se convierte en algo misterioso. Con estas breves consideraciones podemos dejar de lado la cuestión de la auto-referencia de hablantes o personas.

Examinemos ahora la auto-referencia semántica. Para evitarnos complicaciones innecesarias nos concentraremos en el caso de las oraciones. Diremos entonces que la idea es que, en lugar de versar sobre el mundo como la casi totalidad de ellas, ciertas oraciones, más bien inusuales, hablan de sí mismas, es decir, se toman a sí mismas como objetos de su propio discurso. A primera vista,

[3] Véase, por ejemplo, la sección sobre identidad personal en mi libro *Enigmas Filosóficos y Filosofía Wittgensteiniana* (México: Edĕre, 2002), pp. 343-54 y "Wittgenstein y la naturaleza del 'yo'" en *Ensayos de Filosofía de la Psicología* (Guadalajara: Universidad de Guadalajara, 2003), 2ª edición.

ello es fantástico y la primera reacción, la reacción espontánea es la de pensar que ello es o imposible u ocioso o absurdo. Consideremos, por ejemplo, la famosa paradoja del mentiroso: si un mentiroso asevera que todo lo que él dice son mentiras, entonces lo que afirma es verdad pero, dado que lo que un mentiroso enuncia tiene que ser falso, entonces efectivamente lo que dijo es falso, lo cual concuerda con lo que dijo y por lo tanto es verdad y así *ad infinitum*. De otro modo: si lo que el mentiroso dijo es verdadero entonces es falso, luego es verdadero, por consiguiente es falso, por lo tanto es verdadero, *ergo* es falso, y así sucesivamente. Aquí podemos establecer una primera conexión digna de ser consignada: la auto-referencia semántica está internamente conectada con las paradojas y hablar de paradojas es hablar de contradicciones. Muchos sostendrían, sin embargo, que no es el único caso de auto-referencia semántica: habría otros que, se supone, serían igualmente legítimos sólo que no darían lugar a paradojas, sino a enunciados verdaderos. Esto, como veremos, es debatible y lo menos que podemos esperar es que quien defiende esa idea aclare y justifique su idea implícita de auto-referencia semántica. Revisemos el asunto un poco más en detalle.

Consideremos un ejemplo típico: 'La oración recién descrita tiene siete palabras' (φ). A primera vista, parecería no sólo que φ es verdadera sino que además lo es precisamente en virtud de que se refiere a sí misma. Pero ¿es ello así? Lo que realmente parecería estar pasando es algo diferente, a saber, que algo está faltando, porque ¿**cuál** es, **dónde** está esa oración "recién descrita"? Sencillamente **no** hay tal oración. ¿Cómo entonces explicar la apariencia de auto-referencia semántica? Si no me equivoco, la auto-referencia semántica en un caso así se explica por una omisión que debido a una cierta redundancia se da por entendida. Lo que en este ejemplo está presente sólo que tácitamente es la expresión (en negritas) '**La oración** "..." **tiene siete palabras**'. O sea, en realidad lo que tendríamos si hiciéramos explícito todo lo que está dicho y lo que está involucrado (como las nociones de lenguaje y meta-lenguaje y las técnicas de uso y mención de expresiones, *i.e.*, la técnica del entrecomillado) sería: 'La oración "La oración recién descrita tiene siete palabras" tiene siete palabras'. Como en el fondo lo que estamos haciendo es repetir ciertas expresiones, entonces el lenguaje, por un mecanismo de economía, nos permite ahorrarnos la repetición y formar una sola oración, creando así la **ilusión** de auto-referencia. Una vez hechas las aclaraciones pertinentes queda claro que, por lo menos en el ejemplo anterior y contrariamente a una primera impresión, no hay tal auto-referencia. El problema es que se trata de un ejemplo paradigmático, representativo de la auto-referencia semántica, y ello induce a pensar que es la idea misma de que una expresión puede referirse a sí misma lo que resulta sumamente extraño, por no decir incomprensible. La verdad es que no vemos, en este caso típico al menos, tal cosa como auto-referencia semántica. Más aún: no se entiende cómo podría producirse tan singular fenómeno. Nos auto-convencimos de que se había producido el fenómeno de auto-referencia semántica porque no nos habíamos percatado de qué o algo faltaba en una expresión dada o simplemente que estaba implícito en ella. La reflexión en torno a esta cuestión nos hace ver que realmente lo más extraño que podría suceder es que algo creado para dar cuenta del mundo, como lo es el lenguaje, perversamente se transmutara en algo que se revierte sobre sí mismo y modificara así su esencia funcional. Desde esta perspectiva, lo menos indicado parecería ser la aprobación de la auto-referencia semántica. Ahora bien, es precisamente el sospechoso fenómeno lingüístico de la auto-referencia en el que Gödel funda su "prueba".[4]

En resumen, hay casos inobjetables de auto-referencia personal, los cuales no tienen nada de misterioso y se explican por el carácter peculiar de las situaciones en las que se comunican los hablantes (para enfatizar, insistir, llamar la atención, etc.) y casos anómalos, en los que sólo aparentemente se produce un acto de auto-referencia. Así, la auto-referencia legítima es superflua y la ilegítima inaceptable. El problema es que esta última es muy difícil de distinguir de la primera. La auto-referencia lingüística, por su parte, es más bien una ilusión y, si se le toma en serio, no puede más que dar lugar a paradojas, contradicciones, sorpresas, incomprensiones y demás. Es muy importante tener en cuenta lo que hemos dicho, ya que habremos de utilizarlo cuando consideremos la fórmula de Gödel que, como se sabe, afirma de sí misma que no es demostrable. Antes, empero, debemos hacer algunos recordatorios concernientes al contexto histórico en el que se inscribe el famoso Teorema de Incompletitud de Gödel, de 1931.

II) *El Logicismo y la Aritmetización de la Sintaxis*

Es bien sabido que la gran aventura lógica del siglo XX, la cual culminó en la decisiva revolución computacional que se operó durante su segunda mitad, una revolución de inmensas consecuencias e implicaciones para la humanidad en su conjunto y la vida en el planeta en general, se inició propiamente hablando con el esfuerzo por parte de Bertrand Russell por resolver el problema planteado por las paradojas. Russell ofreció tres teorías para dar cuenta de ellas, a saber, la teoría del zig-zag, la de la limitación del tamaño de las clases y la que finalmente él mismo favoreció y que explica la gestación de las paradojas por un "círculo vicioso". En efecto, tanto en *Principia Mathematica* como en "Mathematical Logic as based on

[4] Esto es cuestionable. Podría argumentarse que lo que con el teorema de Gödel acontece es más bien que se borra la distinción entre sintaxis y semántica, pero ¿no se borra con ello también la distinción original "lenguaje objeto-meta-lenguaje" y no se reintroduce con ello la noción misma de auto-referencia?

the Theory of Types"[5] Russell explica la gestación de las paradojas con base en la idea de que en su formulación se comete una cierta falacia consistente en pecar en contra de lo que él denomino el 'principio del círculo vicioso'.[6] Del principio del círculo vicioso Russell da de hecho cinco formulaciones diferentes, todas ellas equivalentes pero destacando diferentes facetas del fenómeno al que alude. La idea es siempre la misma: las paradojas surgen porque al hablar de una totalidad se incluye a ésta dentro de sí misma como si fuera un elemento más. Así, la totalidad resulta ser simultáneamente tanto una totalidad como un elemento de dicha totalidad. Es debido a ese doble juego, permitido por el simbolismo, que surgen las paradojas. Naturalmente, cuando así procedemos lo que construimos no es una proposición, sino un sinsentido. Para bloquear la formación de paradojas, Russell apela a la idea de tipo lógico, que en el fondo no es sino la idea de una jerarquía lingüística, esto es, la distinción de lenguaje objeto, meta-lenguaje, meta-meta-lenguaje, y así *ad infinitum*. La respuesta acabada de Russell pasó a la historia como la 'Teoría de los Tipos Lógicos'. Es ésta, como se sabe, una teoría sumamente compleja y de ramificaciones insospechadas en diversas áreas del pensamiento.

Recordemos ahora rápidamente los lineamientos generales del programa de Russell. En su lucha en contra del idealismo prevaleciente en su época, al cual era central la idea de que el conocimiento humano es una mera ilusión, Russell intentó desarrollar una filosofía cognitivamente optimista. La doctrina de las relaciones externas lo llevó a defender la solidez del conocimiento matemático, al que intentó fundamentar en la lógica. Partiendo, pues, de la lógica de primer grado junto con la teoría de conjuntos, Russell ofreció una definición formalmente impecable y operativa de las diversas clases de números, de las operaciones matemáticas y, en general de la verdades matemáticas. O sea, el programa de Russell era el de reconstruir el todo de las matemáticas recurriendo únicamente a nociones lógicas y conjuntistas. Y es al definir los números en términos de clases que se topa con el problema de las paradojas, lo cual va a crear dificultades inmensas en lo que era una nueva ciencia, a saber, la ciencia de los fundamentos de las matemáticas. Por el momento, quiero enfatizar dos cosas:

> a) el proceder russelliano es de carácter constructivo: primero se definen los números naturales, luego los racionales, los irracionales, los complejos, etc.; se da cuenta primero de las operaciones elementales de la aritmética y de sus verdades más elementales y

---

[5] B. Russell, "Mathematical Logic as based on the Theory of Types" en *Logic and Knowledge* (London: Allen and Unwin, 1971), pp. 59-102.

[6] Aunque hay muchas, de las mejores presentaciones del tratamiento de las paradojas por parte de Russell es, sin duda, el capítulo "Russell's Solution to the Paradoxes", del excelente libro de Ch. S. Chihara, *Ontology and the Vicious-Circle Principle* (Ithaca/London: Cornell University Press, 1973).

paulatinamente se abarcan todas las ramas de las matemáticas. El programa logicista de Russell lleva **de la lógica a la aritmética**.

b) El principio del círculo vicioso, central a la solución russelliana del problema de las paradojas, es básicamente un principio anti-auto-referencial, es decir, un principio que proscribe la auto-referencia semántica. Como ya indiqué, desde la perspectiva de Russell cuando dicho principio no se respeta lo que se construye es un **sinsentido**.

Lo anterior es importante tenerlo presente porque el teorema de Gödel, que sistemáticamente ha sido visto como una refutación o una aniquilación de proyectos como (*inter alia*) el programa logicista de Russell, forma parte de una estrategia que es en cierto sentido inversa al de este último: en lugar de logicizar la aritmética, lo que Gödel hace es **aritmetizar la sintaxis**. O sea, Gödel no se plantea la cuestión de la caracterización del número: él simplemente los asume y trabaja con ellos.[7] Bien vistas las cosas, por lo tanto, los proyectos de Russell y Gödel parecen constituir o pertenecer a dos líneas de investigación completamente independientes y que, más que otra cosa, sólo se tocan en un punto. En otras palabras, parecería que Gödel habría podido construir su prueba sin saber absolutamente nada del programa de Russell. De ahí que, como argumentaré más abajo, hay un sentido en el que si el trabajo de Russell es meta-matemático, el de Gödel es más bien meta-meta-matemático. Lo que es importante determinar, por consiguiente, es cómo incide uno en el otro, tomando en cuenta lo que ambos lógicos sostienen. Porque si el fenómeno de la auto-referencia no es en el fondo más que una ilusión semántica, el hecho de que se utilice un aparato formal impresionante no le hace perder su carácter ilusorio o de espejismo semántico. Ahora bien, que la auto-referencia es crucial en el teorema de Gödel es algo difícil de negar. Hofstadter, por ejemplo, lo ha enunciado como sigue: "A Gödel se le ocurrió la idea de utilizar el razonamiento matemático para explorar el razonamiento matemático".[8] Y es muy significativo que la cuestión de si ello es en principio legítimo o no sea un tema que muy pocos han considerado que valía la pena discutir. En otras palabras, normalmente se cuestiona la auto-referencia, pero cuando se llega al teorema de Gödel entonces nadie protesta. En verdad, difícilmente podría pasarse por alto el hecho de que el grandioso resultado de Gödel, *viz.*, una fórmula que dice de sí misma que no puede ser demostrada en el sistema, representa una violación flagrante del principio del círculo vicioso (el cual en sí mismo parece bastante razonable) y de la idea intuitiva de que la auto-

[7] Podría, desde luego, objetarse, que Gödel trabaja no con números, sino con numerales y es tentador ver en éstos elementos puramente sintácticos, al igual que sus fórmulas. Pero esta lectura es cuestionable, puesto que por una parte Gödel realiza operaciones aritméticas con sus numerales y, por la otra, es obvio que él asume que sus signos tienen **algún** significado y ¿qué puede significar un numeral si no un número?

[8] G. R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach. Una Eterna Trenza Dorada* (México: CONACYT, 1982), p. 19.

referencia semántica no es un procedimiento lingüístico válido. Pero si nadie ha refutado el principio en cuestión y si normalmente nadie admite construcciones paradójicas generadas por auto-referencia, entonces claramente estamos aquí en un conflicto que teóricamente está todavía en espera de resolución. Cabe preguntar: si por toda una variedad de razones queremos zafarnos de las paradojas: ¿por qué entonces se acepta sin cuestionar la prueba de Gödel si ésta se contrapone a intuiciones tan básicas como la incorporada en el principio del círculo vicioso? El problema de la existencia de Dios nos puede ser útil en este contexto: si efectivamente no puede haber pruebas *a priori* de la existencia de una entidad trascendente, ¿podría el hecho de que alguien inventara una "prueba" formalmente impresionante, en la que se usaran libremente los conceptos de infinito, pruebas recursivas, abstracciones, operadores modales, etc., hacerla válida? ¿Y acaso no es precisamente eso lo que estaría sucediendo con el teorema gödeliano de incompletitud? Me parece que lo más que podría sostenerse es que Gödel demostró que hay casos especiales de auto-referencia que no son ni paradójicos ni dispensables sino de una tercera categoría, pero en todo caso ello es algo en favor de lo cual se necesita abogar y la verdad es que argumentos en este sentido no abundan.

Quizá debamos hacer ahora algunas aclaraciones generales concernientes al teorema de Gödel. Nadie ha cuestionado y probablemente nadie cuestionará el formalismo gödeliano, esto es, sus definiciones, la introducción de sus términos primitivos, sus reglas de inferencias y sus transiciones.[9] En todo caso, no es la estructura formal misma lo que está en cuestión (por no decir "en juego"). Si los matemáticos aceptan como formalmente válida la prueba de Gödel no nos toca a nosotros objetar nada al respecto. Pero una cosa es que sea inatacable y otra que su significación sea transparente. Es su interpretación, su significado, sus implicaciones lo que es debatible y en relación con lo cual no hay todavía consensos claros y definitivos. O sea, es lo que el teorema "dice" lo que es todavía asunto de debate. Para movernos en la dirección de la aclaración, lo que hay que hacer es exhibir los supuestos implícitos en el trabajo de Gödel, sacar a la luz las nociones que usa pero que él mismo nunca esclarece, como las de proposición matemática, "decir", auto-referencia y demás. Es sólo cuando se tengan todos o por lo menos muchos de los elementos del gran rompecabezas, el iceberg completo y no nada más la parte que sobresale, que podremos empezar a entender qué fue realmente lo que logró Gödel con su prueba. Quisiera tratar de establecer un par de cosas en relación con esto último, pero para ello habremos primero de retomar algunas ideas de Ludwig Wittgenstein en torno a la naturaleza de la verdad matemática y sin las cuales difícilmente podría siquiera alguna reflexión en este sentido arrancar.

---

[9] Esto, en mi opinión, es una grave omisión, porque es innegable que **hay** problemas de significación en las definiciones y en la prueba misma, dado que por ejemplo una misma fórmula resulta tener simultáneamente tanto un significado matemático como uno meta-matemático!

III) *El* ***Status*** *de las Proposiciones Matemáticas*

Sin duda alguna el pensamiento del Wittgenstein de la madurez, esto es, el posterior a la discusión respecto a lo que es seguir una regla y el argumento del lenguaje privado, representa el punto culminante de una trayectoria pasmosa, única, pero puede sostenerse que el pensamiento del que quizá podríamos denominar el 'Wittgenstein intermedio', esto es, básicamente el Wittgenstein de *Ludwig Wittgenstein y el Círculo de Viena*,[10] las *Observaciones Filosóficas* [11] y la *Gramática Filosófica* [12], es un pensamiento fresco, intrépido, excitante, audaz, novedoso. En particular en las dos últimas obras citadas está plasmada una nueva filosofía del lenguaje y de las matemáticas, llena de intuiciones originales, de argumentaciones (en el estilo wittgensteiniano) contundentes y que hacen sentir que, página tras página, se hace progreso filosófico real. Para los objetivos de este trabajo me concentraré en especial en algo de lo mucho y muy valioso que Wittgenstein sostiene en las *Observaciones Filosóficas*. En particular, lo que deseo hacer son ciertos recordatorios concernientes a los puntos de vista de Wittgenstein en relación con la idea de demostración o prueba matemática. Esta breve labor de reconstrucción nos permitirá disponer de una plataforma desde la cual abordar y tratar de evaluar el valor filosófico del resultado de Gödel. Es obvio, por otra parte, que algo así se tiene que hacer, pues de lo contrario lo que estaríamos haciendo sería enfrentar el teorema de Gödel desde la perspectiva del sentido común, en cuyo caso estaremos perdidos y no tendremos otra cosa que ofrecer que la aburrida lectura simplista de siempre, lo cual es algo que ciertamente queremos evitar.

Empecemos con algunas generalidades. Nuestro punto de partida pueden serlo dos ideas que si se quiere se les puede calificar de 'triviales' (aunque no lo sean), *viz*., que en matemáticas nos las habemos con sistemas y que las matemáticas son por excelencia la ciencia de la demostración. Lo primero hace alusión al carácter integrado y orgánico de las matemáticas. La idea es que las proposiciones matemáticas están sistemáticamente conectadas unas con otras (no, desde luego, de manera arbitraria). No hay proposiciones matemáticas aisladas del resto. '2 + 2 = 4' presupone que 2 +1 = 3, que 3 + 1 = 4, que 3 + 2 = 5, etc. Considerada al margen o fuera de ese sistema proposicional, '2 + 2 = 4' no significa absolutamente nada. Por otra parte, dejando de lado los puntos de partida, esto es, los axiomas, es claro que a

[10] *Ludwig Wittgenstein and the Vienna Circle*. *Conversations recorded by* Friederich *Waismann.* Edited by Brian McGuinness (Oxford: Basil Blackwell, 1979). Hay traducción al español de Manuel Arbolí: *Ludwig Wittgenstein y el Círculo de Viena* (México: Fondo de Cultura Económica, 1973).
[11] L. Wittgenstein, *Philosophical Remarks* (Oxford: Basil Blackwell, 1975). Hay traducción al español de Alejandro Tomasini Bassols: *Observaciones Filosóficas* (México: IIF/UNAM, 1997).
[12] L. Wittgenstein, *Philosophical Grammar* (Berkeley/Los Angeles: University of California Press, 1978). Hay traducción al español de Luis Felipe Segura Martínez: *Gramática Filosófica* (México: IIF/UNAM, 1996).

cualquier proposición matemática (en el sentido de teorema, no meramente de fórmula bien formada) **se llega** y se llega a ella por medio de una demostración. No hay forma de que una proposición matemática "se cuele", por así decirlo, y se incruste dentro del sistema si carece de su respectiva prueba. En matemáticas no puede haber fraudes. La prueba o demostración es la única forma como una proposición matemática puede integrarse o ser incorporada en un sistema y, por ende, es su única forma de legitimación *qua* proposición matemática. Por consiguiente, el **sentido** de una proposición matemática es una función de su pertenencia al sistema y su pertenencia al sistema es precisamente lo que su demostración garantiza. Sin demostración no hay sentido y, por consiguiente, tampoco verdad. El sentido de una proposición matemática es su contribución a la expansión del sistema al que pertenece. "Lo que una proposición matemática dice es siempre lo que su prueba prueba. Es decir, nunca dice más de lo que su prueba prueba".[13] Quizá podríamos ir un poco mas lejos y afirmar que lo que la proposición matemática expresa se muestra en las proposiciones de las que se deriva y las proposiciones matemáticas que a su vez permite deducir. En los sistemas matemáticos no puede haber huecos, puesto que "Las matemáticas son un método lógico"[14] y lo que esto significa es que siempre hay una forma de construir un camino (una prueba constructiva) hacia una proposición matemática. Ese camino es su prueba. Un problema matemático presupone un método de prueba. Por eso distingue Wittgenstein entre problema y misterio, entre solución y revelación: "Esto es, donde sólo podemos esperar la solución gracias a alguna clase de revelación, ni siquiera hay un problema. A una revelación no corresponde ninguna pregunta".[15] Wittgenstein no niega que haya conjeturas matemáticas, esto es, proposiciones que en un momento dado del desarrollo de las matemáticas son "indecidibles". Lo que al respecto afirma es simplemente que una proposición así es sencillamente una proposición "para cuya solución no poseemos **todavía** [énfasis mío] un sistema *escrito*".[16] Desde este punto de vista, lo que Gödel habría mostrado es que hay proposiciones verdaderas para las cuales en la aritmética de Peano nunca habrá un "sistema escrito". Lo menos que puede decirse es que ello suena *prima facie* increíble.

El ver las matemáticas a la Wittgenstein, *i.e.*, como (en palabras de Hintikka) un "montón de cálculos",[17] ofrece algunas ventajas. Por ejemplo, de inmediato permite entender varias cosas. Para empezar, se nos aclara por qué las proposiciones

[13] L. Wittgenstein, *Observaciones Filosóficas*, XIII, sec. 154.
[14] L. Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus* (London: Routledge and Kegan Paul, 1978), 6.2 (a).
[15] L. Wittgenstein, *Observaciones Filosóficas*, XIII, sec. 149.
[16] *Ibid*., XIII, sec. 151.
[17] J. Hintikka, "The Original *Sinn* of Wittgenstein's Philosophy of Mathematics" en *Ludwig Wittgenstein: Half-Truths and One-and-a-Half-Truths* (Dordrecht/Boston/London : Kluwer Academic Publishers , 1996), p. 156.

matemáticas no **dicen** nada. No hay nada más erróneo que concebir las proposiciones matemáticas como proposiciones en el sentido usual sólo que en lugar de venir, por así decirlo, vestidas en letras vienen vestidas en numerales.[18] Aquí sigue vigente el pensamiento del *Tractatus* de acuerdo con el cual "Las proposiciones de las matemáticas no expresan pensamientos".[19] Por consiguiente y en segundo lugar, entendemos por qué en matemáticas no pueden darse (o trazarse) las jerarquías simbólicas que sí tenemos en el lenguaje. Dentro o al interior de las matemáticas no hay tal cosa como "meta-matemáticas". Lo que "demostraciones meta-matemáticas" genuinas representan es en todo caso la expansión del cálculo, más cálculo, **no** una reflexión **sobre** él. Las matemáticas no admiten ser expresadas "en prosa". Cuando ésta aparece, ya estamos fuera del mundo de las matemáticas, propiamente hablando. "Quiero decir, la proposición matemática no es la prosa, sino la expresión exacta".[20] En matemáticas se trabaja con números, no se habla acerca de ellos.

A lo largo y ancho de su obra Wittgenstein abogó en favor de la idea de que el valor o la importancia de las matemáticas no es algo intrínseco a ellas, sino más bien algo externo, es decir, algo que les viene de su aplicación, de su utilidad. La utilidad de las matemáticas se expresa, por una parte, en la vida cotidiana, en toda clase de transacciones que los hombres realizan, desde las más simples hasta las más complejas, y, por la otra, en su incorporación y empleo en las teorías científicas. En el *Tractatus* Wittgenstein enunció su punto de vista de manera concisa y sin ambigüedades como sigue: "En la vida no es nunca una proposición matemática lo que necesitamos. Más bien, empleamos proposiciones matemáticas *únicamente* para inferir de proposiciones que no pertenecen a las matemáticas otras que, de igual modo, tampoco pertenecen a las matemáticas".[21] Es claro que no puede haber proposiciones matemáticas vagas u ociosas. O sea, una proposición matemática, como cualquier otra, tiene que reportarnos alguna utilidad, pero eso es algo que puede hacer sólo en la medida en que forme parte de un sistema, para lo cual su prueba es imprescindible, puesto que ésta es (por decirlo de alguna manera) su boleto de integración al sistema, su certificado de legitimidad. Una proposición matemática inconexa e inútil es un contrasentido. Por lo tanto, hay una relación interna fundamental entre "matematicidad" y "aplicabilidad".[22]

[18] Se podría quizá querer señalar, a manera de contraejemplo, a las variables, que sirven para indicar generalidad, pero no debería olvidarse que, independientemente de ello, sus valores son siempre números.
[19] L. Wittgenstein, *Tractatus*, 6.21.
[20] L. Wittgenstein. *Observaciones Filosóficas*, XIII, sec. 155.
[21] L. Wittgenstein, *Tractatus*, 6.211 (a)
[22] Aquí asumo que la, por así llamarla, legitimación de las matemáticas es externa a éstas y que, por lo tanto, no puede aparecer más que en la "vida civil". Por razones obvias, no puedo en este ensayo abordar siquiera la espinosa cuestión de las relaciones entre las matemáticas y la experiencia, ya sea perceptual o teórica, puesto que eso me alejaría demasiado de mi tema y me llevaría por otros derroteros.

Es importante entender la perspectiva wittgensteiniana para poder apreciar con justicia su crítica. Lo que Wittgenstein hace es describir la funcionalidad peculiar de las proposiciones matemáticas. De esta descripción emerge la aclaración de su modo de significación. Y lo que poco a poco Wittgenstein descubre es, como argumenté anteriormente, que hay una conexión esencial entre una proposición matemática y su prueba o demostración. "La proposición matemática es el último eslabón en una cadena de prueba".[23] Ahora bien, lo que hay que entender es que esta idea resulta de una descripción de lo que de hecho los matemáticos hacen, no de una concepción fantasiosa o *a priori* de las matemáticas. No formaba parte de las intenciones de Wittgenstein desarrollar una teoría del significado al modo tradicional. Por lo tanto, la etiqueta "verificacionista", a la que tantas veces se ha recurrido para caracterizar su posición, no es la apropiada. Wittgenstein no fue nunca un verificacionista en el sentido de los empiristas lógicos (Schlick, Ayer, etc.). Su objetivo era dar cuenta de la racionalidad de las matemáticas, de su estructura y de su *modus operandi*, y ello lo llevó a examinar el modo como adquieren sentido sus proposiciones. Esta perspectiva le permitió hacer una serie asombrosa de pronunciamientos concernientes a toda una variedad de temas, rara vez abordados por otros: el carácter prescriptivo de las proposiciones matemáticas, las diferentes clases de pruebas que hay (directas, por inducción, por reducción al absurdo, etc.), la naturaleza de los números, el infinito, etc. Pero, más relevante para nuestros propósitos, le proporcionó una plataforma desde la cual comprender mejor y discutir los resultados de los matemáticos. Veamos a dónde nos lleva esto en el caso de Gödel.

IV) *La Prueba de Gödel*

El célebre artículo de Gödel, como se sabe, fue publicado en 1931, si bien su impacto entre los filósofos empezó realmente a hacerse sentir por lo menos después de que Tarski presentara su artículo sobre la verdad, esto es, en 1935. Ahora bien, las observaciones de Wittgenstein que hemos citado, y algunas otras que habremos de utilizar, datan de 1929 (!). Parecería, pues, que Wittgenstein de alguna manera "olfateaba" resultados como el que haría famoso a Gödel un par de años después. Lo interesante y asombroso del caso es que, independientemente de que resulten convincentes o no, sus pensamientos ciertamente son relevantes para la comprensión y la discusión seria del resultado de Gödel.

El trabajo de Gödel presupone todo el trabajo hasta entonces realizado en el terreno de los fundamentos de las matemáticas. Su punto de partida son las

---

[23] L. Wittgenstein, *Observaciones Filosóficas*, XIII, sec. 162.

paradojas, en las cuales Gödel se inspira. Ahora bien, independientemente de que en última instancia fuera fallido, el programa logicista de Russell (y Whitehead) había inspirado a muchos otros matemáticos, de manera que se tenía una idea clara de qué era lo que se perseguía. El objetivo primordial para muchos era demostrar la consistencia de las matemáticas (signifique eso lo que signifique) y el ideal para alcanzarlo era la axiomatización. Se suponía que se podían ofrecer pruebas de consistencia, de manera que quedara demostrado que, por ejemplo, en la aritmética de Peano no se puede deducir tanto φ como $\sim\varphi$, para alguna fórmula φ.

Lo que Gödel hizo fue construir un sistema formal en el que se asigna un número a cada uno de los signos empleados (constantes, variables, paréntesis, cuantificadores, etc.), de manera que cualquier fórmula bien formada tiene una traducción al lenguaje numérico. Pero eso no es todo: todas las series de fórmulas bien formadas también la tienen, de manera que a cualquier demostración formal corresponde una demostración numérica. El número que le corresponde a cada expresión es su "número de Gödel". Esto es lo que se conoce como la aritmetización de la sintaxis. Curiosamente, en este caso es la aritmética la que "habla" de las oraciones del meta-lenguaje, en el sentido de que los refleja. En efecto, una vez establecidas las convenciones, Gödel pasa a hacer ver que "Cada enunciado meta-matemático está representado por una fórmula única dentro de la aritmética".[24] O sea, todo lo que se afirme **sobre** el cálculo tendrá una representación o formulación numérica. En particular, afirmaciones como la de que algo es una prueba de una cierta proposición quedarán reflejadas en el simbolismo aritmético de determinada manera, es decir, como fórmulas bien formadas de la misma aritmética. Nagel y Newman lo exponen de este modo: "un enunciado meta-matemático que dice que una cierta secuencia de fórmulas es una demostración de una fórmula dada es verdadera si, y sólo si, el número de Gödel de la supuesta prueba está en la relación aritmética designada aquí por 'Dem' con el número de Gödel de la conclusión".[25] Acto seguido, y aquí viene el gran truco formal, Gödel se las arregla para construir una fórmula *G* que es la representación aritmética del enunciado meta-matemático 'La fórmula *G* no es demostrable'. Quizá debamos aclarar con más detalle cómo aparece aquí el elemento de auto-referencia. Lo que sucede es que lo que la fórmula que Gödel construye hace al ser, por así decirlo, decodificada, es **afirmar de ella misma** que no es demostrable **en** el sistema construido. Gödel hizo ver, además, que si *G* fuera demostrable, entonces su negación también lo sería, con lo cual se habría hecho ver que la aritmética es inconsistente, puesto que permitiría deducir tanto una fórmula como su negación. Asumiendo, por lo tanto, que la aritmética **es** consistente, lo que se sigue es que la fórmula en cuestión es "indecidible", es decir,

---

[24] E. Nagel y J. R. Newman, *Gödel's Proof* (USA: New York University Press, 1958), p. 77.
[25] *Ibid*, p. 79.

que ni ella ni su negación son demostrables. De particular importancia es señalar que no por ser indecidible deja la fórmula de ser verdadera. La verdad de la fórmula quedó demostrada meta-matemáticamente. Está implicado, desde luego, que la aritmética es incompleta, es decir, que necesariamente contiene verdades que no son demostrables. El resultado atañe a la aritmética por la sencilla razón de que el lenguaje que se aritmetiza es el lenguaje de la lógica (de segundo orden), es decir, un lenguaje suficientemente fuerte como para contener la aritmética.

En síntesis: lo que Gödel logró fue construir una "prueba" de una "proposición numérica" que "se refiere a sí misma" para "decir de sí misma" que aunque "verdadera", es "indemostrable" en el sistema al que pertenece. Lo menos que puede decirse es que se necesitan demasiadas comillas dobles para enunciar lo que se quiere afirmar. Intuitivamente al menos, es obvio que aunque ni los detectemos ni sepamos explicarlos, se han operado aquí cambios semánticos importantes y el que no sepamos dar cuenta de ellos quiere decir que aún no se ha aprehendido cabalmente el significado del teorema de Gödel. Por otra parte, si el sistema de Gödel no fuera otra cosa que una pequeña maquinaria formal, su trabajo sería una curiosidad y nada más. Pero el sistema de Gödel es tal que no sólo se aplica a las matemáticas en su conjunto (*i.e.*, a aquellas ramas de las matemáticas cuyos axiomas y reglas son recursivamente enumerables y, por ende, cuyos teoremas se pueden ir enunciando), sino más en general que su resultado se aplica a cualquier sistema que sea lo suficientemente fuerte como para contenerlas, esto es, que pueda ser puesto en relación con los números de una manera sistemática. El resultado es, pues, todo menos trivial.

El hecho de que los matemáticos no tengan nada qué objetar a la prueba de Gödel ni mucho menos quiere decir que entonces no tenga ésta nada de extraño, que no haya nada en ella para dejarnos perplejos y que no pueda ser cuestionado desde otras plataformas. Una forma de transmitir nuestra perplejidad es equiparando la prueba con lo que sería un procedimiento semejante sólo que en otro contexto simbólico. Consideremos que nuestro lenguaje objeto es el ruso y nuestro meta-lenguaje el español. Originalmente, lo que se quería era probar algo acerca del ruso (el cual corresponde, en nuestro ejemplo, a la aritmética), pero lo que ahora hacemos es usar el ruso para codificar el español y hablar acerca de éste. Así, a cada signo del español le hacemos corresponder uno y sólo un signo del alfabeto cirílico. Cualquier expresión del español tendrá entonces su versión en ruso. Y lo que ahora el Gödel imaginario de nuestro ejemplo nos diría es que hay una fórmula en cirílico que afirma de sí misma que no es demostrable y lo que a su vez eso querría decir es que hay una oración en español cuyo valor de verdad no podemos determinar! Si el parangón vale y tiene alguna utilidad es para dejar en claro que hay algo no sólo de sospechoso sino de fantástico en la prueba de Gödel, por más que de acuerdo con los técnicos matemáticos ésta sea impecable, y por consiguiente también en el proyecto mismo, algo que quienes se limitan a repetir una y otra vez el resultado de Gödel o su prueba completa no parecen ni siquiera detectar y mucho menos saber despejar.

En sus escritos de filosofía de las matemáticas, Wittgenstein enuncia diversas críticas al trabajo de Gödel, críticas que en su mayoría han sido minimizadas, vistas con desdén o, en el mejor de los casos, ignoradas. Importantes lógicos y filósofos de la ciencia han coincidido en opinar que simplemente Wittgenstein "no entendió" el teorema, o por lo menos no supo apreciar sus implicaciones formales.[26] Yo pienso que el asunto no es tan simple y que las críticas de Wittgenstein algo nos dicen de más interesante que lo que han sostenido quienes se han limitado a aplaudir el malabarismo formal de Gödel. De eso me ocuparé en la siguiente sección.

V) *Presuposiciones Gödelianas*

Wittgenstein ha sido criticado en numerosas ocasiones por haber afirmado que su tarea "es no hablar acerca de (*e.g.*) la prueba de Gödel, sino esquivarla".[27] Esto ha sido interpretado por muchos como una declaración explícita de incapacidad por parte de Wittgenstein para enfrentar y dar cuenta del teorema de incompletitud. Para quien conoce, aunque sea mínimamente, la trayectoria de Wittgenstein, un juicio así resulta, aparte de injusto, torpe. Para empezar, Wittgenstein conocía el teorema y estaba perfectamente consciente de lo que entrañaba. Lo que él estaba afirmando era precisamente que su función no consistía en intentar poner en cuestión una demostración particular, el trabajo formal del matemático. Su crítica no pretendía ser "técnica" (cosa que por otra parte, por lo menos hasta donde yo sé, nadie todavía ha intentado). Ignoro si Wittgenstein pensaba que el trabajo de Gödel era formalmente cuestionable, es decir, tal que se pudieran encontrar fallas internas (no hay en sus escritos nada en este sentido), pero lo que sí es claro es que él intuía que dicho teorema acarreaba dificultades de comprensión, porque con él se había aportado algo nuevo, con lo cual se creaban nuevos enigmas filosóficos. Esa era en general la actitud de Wittgenstein, lo cual queda además ampliamente confirmado con lo que dice inmediatamente antes de la multi-citada oración. Allí mismo él dice,

---

[26] El artículo "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics" en *Truth and Other Enigmas* (Duckworth: London, 1978), pp. 166-185, de M. Dummett, y el ensayo "Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics", de G. Kreisel, "Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics", en *British Journal for the Philosophy of Science*, IX (1958-9), pp. 135-158, ejemplifican muy bien esta posición un tanto desdeñosa y displicente en relación con el trabajo de Wittgenstein en el área de la filosofía de las matemáticas y, muy en especial, de sus reflexiones en torno al teorema de Gödel.

[27] L. Wittgenstein, *Remarks on the Foundations of Mathematics* (Cambridge/London: The M.I.T. Press, 1975), V, sec. 16.

refiriéndose a la lógica de Russell, que su trabajo "no es atacar la lógica de Russell desde *dentro*, sino desde fuera.

Es decir: no atacarla matemáticamente – de lo contrario sería yo un matemático – sino su posición, su función".[28] Su actitud es la misma frente al resultado de Gödel. O sea, no es *qua* técnico sino como filósofo que Wittgenstein encara tanto la lógica de Russell como el teorema de Gödel. Su tarea consiste, por lo tanto, en ofrecer una dilucidación filosófica de un resultado que obviamente plantea nuevos retos intelectuales, retos que en general sus más fanáticos adherentes ni siquiera perciben y simplemente dejan pasar. Insisto en que, por lo menos hasta donde yo sé, Wittgenstein no está rechazando la prueba de Gödel en cuanto tal, es decir, *qua* demostración. Si ningún matemático ve problemas en la prueba misma ¿cómo podría alguien externo a las matemáticas pretender siquiera rechazarla? Wittgenstein, por lo tanto, acepta (sobre la base del aval dado por los matemáticos) el resultado de Gödel, en el sentido de que acepta que es la fórmula final de una secuencia válida de fórmulas y no tiene, por consiguiente, para qué hablar de la prueba misma. Ello parece más bien obvio. El punto importante, en cambio, es que dicho resultado es filosóficamente problemático, como puede serlo una definición de 'materia' en la física cuántica o de 'vida' en la biología molecular.

¿Por qué es problemático el teorema de Gödel? Es evidente (o debería serlo) que no se trata de un teorema matemático más. Hay demostraciones matemáticas más complejas que no son filosóficamente interesantes. El teorema de Gödel sí lo es. ¿Por qué? Disponemos ya de algunos elementos que quizá nos permitan empezar a intentar responder a esta pregunta.

En primer lugar, Wittgenstein tiene suspicacias frente al teorema de Gödel porque la labor de este último representa el último eslabón en una cadena de trabajos que tienen su origen en el proyecto logicista russelliano y Wittgenstein, con no malas y no pocas razones, cuestiona dicho proyecto. Es, pues, normal que algo que emana de dicho programa le resulte de entrada sospechoso. Por otra parte, del proyecto de Russell surgió, como una respuesta a lo que parecía un programa fallido, el de Hilbert, *i.e.*, el proyecto de mostrar que la aritmética es consistente, un programa que a Wittgenstein también le resulta de hecho incomprensible, porque el miedo por las contradicciones siempre le pareció a Wittgenstein un típico producto de confusiones e incomprensiones.[29] Una vez más, podrá pensarse lo que se quiera, pero lo único que no se puede afirmar es que su posición esté basada en argumentos desdeñables. Es perfectamente comprensible, por lo tanto, que Wittgenstein en un primer acercamiento se sintiera receloso frente al sorprendente resultado de Gödel.

---

[28] *Ibid*., V, sec. 16.

[29] Véase mi artículo "Russell y Wittgenstein sobre Contradicciones y Paradojas" en *Estudios sobre las Filosofías de Wittgenstein* (México: Plaza y Valdés, 2003).

Por si fuera poco, Gödel enturbia las aguas con un trabajo en el que menciona *Principia Mathematica* cuando su verdadero blanco es el programa de Hilbert, puesto que lo que ante todo Gödel muestra es que la aritmética es indecidible dentro de la misma aritmética y que su consistencia no puede ser probada por medio de su propia teoría. Pero es obvio que Russell nunca se impuso a sí mismo de manera explícita la tarea de demostrar la consistencia de las matemáticas. Lo que él quería hacer ver era que cualquier verdad matemática tenía como traducción una verdad lógica. Dado que a la mitad de su programa se topó súbitamente con el problema de las paradojas, su labor consistió entonces en tratar de encontrar un mecanismo para resolver el problema que éstas planteaban. Esto Gödel simplemente ni lo menciona, a más de que ni siquiera se propone lidiar con dicho tema. Es más: puede afirmarse que lo que él logra es más bien (por lo menos a primera vista) reivindicar las paradojas, al formalizar una nueva "paradoja" para la cual no hay una solución formal.[30] No es, pues, del todo errado afirmar que Gödel representa la venganza y el triunfo de las paradojas y de la auto-referencia, a las que con tanto trabajo se había logrado contener. En este sentido, el trabajo de Gödel sí es claramente anti-russelliano.

No estará de más preguntarse por la **clase** de problemas que Gödel se aboca a dejar resueltos en forma definitiva. Consideremos por un momento el lenguaje natural o el de cualquier ciencia natural. De seguro que se pueden hacer en dichos lenguajes aseveraciones que nunca podrán ser confirmadas o desconfirmadas, pero que no obstante son significativas. Por ejemplo, podemos afirmar que hay en el centro del planeta de nuestro sistema solar más distante de la Tierra lombrices carnívoras. Podemos afirmar con relativa seguridad que nadie estará en posición nunca de confirmar o de rechazar con base en evidencias empíricas semejante proposición. Para el lenguaje empírico es esa una proposición "indecidible". No obstante, nadie se sorprende por ello ni considera que se trate de algo que revista alguna importancia especial. ¿Por qué entonces poner el grito en el cielo cuando alguien nos demuestra que lo mismo puede darse en el caso de las proposiciones matemáticas, esto es, que habrá siempre alguna proposición que quizá sea verdadera, pero que no podrá nunca ser demostrada en la teoría de los números o, más en general, en un sistema formal con determinadas características? A más de uno podría resultarle inclusive hasta evidente! A lo que Wittgenstein apunta, por lo tanto, es a lo débil de la motivación gödeliana. En todo caso, lo que Gödel está estableciendo es un resultado que anula todo un proyecto de fundamentación que, entre otras cosas, era también semi-absurdo. Así vistas las cosas, sería con un resultado fantástico que se estaría anulando un programa absurdo. Eso sí parece tener sentido. Si efectivamente el problema de la inconsistencia de la aritmética es

[30] Digo "nueva paradoja", porque es claro que el resultado de Gödel no conduce a contradicciones, como las paradojas que a Russell preocupan (o por lo menos no se ha demostrado que así sea).

un pseudo-problema ¿no tendrá por lo menos un *status* raro cualquier teorema que establezca algo decisivo en relación con él? Después de todo, una solución para un pseudo-problema tiene que ser algo sumamente extraño. Por lo menos un poco de suspicacia en este caso no parece del todo fuera de lugar.

En segundo lugar, es claro que con su teorema Gödel echa por tierra muchas distinciones útiles y que parecían definitivas y no deja de ser curioso que nadie proteste por ello, es decir, que todo mundo acepte ecuánimemente semejante proceder. En especial, en su teorema se borra, al parecer matemáticamente de manera justificada, la distinción "lenguaje objeto – meta-lenguaje", así como se ignora la idea del *Tractatus* de que una función no puede ser su propio argumento.[31] Ahora bien, en lo que hay que insistir es en que no basta con un resultado para desechar una distinción que funciona muy bien en todas partes menos precisamente en la prueba en cuestión. Parecería que el mecanismo gödeliano está necesitado de alguna especie de justificación, es decir, que debería venir acompañado de alguna clase explicación, que aclaraciones que Gödel simplemente no da. El mero teorema (o la fórmula final) no basta para comprenderlo. Podríamos aquí suponer que el resultado de Gödel si bien es inobjetable sintácticamente es ambiguo en algún otro sentido. Por ejemplo, podría sugerirse (y es a mero título de sugerencia que aquí me pronuncio) que si consideramos al lenguaje de la aritmética como el lenguaje objeto y al lenguaje de la lógica como el meta-lenguaje, entonces el lenguaje en el que se lleva a cabo la aritmetización de la sintaxis equivale realmente no a borrar la distinción "lenguaje objeto – meta-lenguaje", sino a ampliarla, pues el resultado de Gödel sería una demostración que estaría tomando cuerpo en el "meta-meta-lenguaje". Ahora bien, el que ello fuera así implicaría que en el teorema de Gödel los numerales tienen otro significado, diferente en algún sentido del usual. Esto puede ser una idea totalmente descabellada, pero en todo caso surge de la inaplazable necesidad de disponer de una explicación de un resultado: tenemos derecho a saber por qué hemos de admitirlo si entra en conflicto con distinciones que normalmente todos aceptamos. Queremos saber cómo podemos mantener simultáneamente las dos cosas. Y la explicación, naturalmente, no puede consistir en apuntar una vez más al teorema.

Lo dicho más arriba nos lleva a un tercer punto que es también importante. El teorema de Gödel es desconcertante no sólo porque es una paradoja imposible de rebatir formalmente y porque anula distinciones establecidas y útiles, sino también porque pone en crisis una determinada concepción de las proposiciones matemáticas (y en general de las matemáticas), **sin reemplazarla con nada**. Nosotros partimos de la idea de que las matemáticas son la ciencia de la demostración y, por lo tanto,

[31] L. Wittgenstein, *Tractatus*, 3.333.

establecimos, en relación con las proposiciones matemáticas, una conexión interna o necesaria entre "sentido", "demostrabilidad" y "verdad". Pero el teorema de Gödel destruye esta concepción, puesto que lo que representa es un contra-ejemplo: por medio de él se demuestra precisamente que hay al menos una proposición matemática (y probablemente un número infinito de ellas) que es (son) verdadera(s) y por ende significativa(s), pero que no es (son) demostrable(s) dentro del marco de las teorías matemáticas consideradas. Pero, una vez más, tenemos que poner en la balanza lo que está en juego: ¿rechazamos una concepción bien fundada sólo por un teorema o hacemos un esfuerzo por interpretar el teorema de alguna manera que no eche por tierra dicha concepción? Yo creo que esa era la vía por la que Wittgenstein empezaba a adentrarse y que, desafortunadamente, no pudo recorrer hasta el final. No obstante, ciertamente marcó con claridad el camino: lo que necesitamos es hacer un esfuerzo de imaginación para dotar de sentido al teorema de Gödel de manera que resulte consistente con una concepción muy bien armada de las matemáticas en su conjunto. Con lo que obviamente no podemos quedarnos contentos es con un juego formal impecable, pero que sencillamente impide que tengamos una concepción explicativa y congruente de las matemáticas *in toto*.

Por lo anterior, me inclino a pensar que lo que con Gödel se alcanza es más que una prueba algo así como un esquema de pruebas, una (por así decirlo) prueba de pruebas, la demostración de una nueva clase de pruebas. Él probó algo (*viz*., una limitación) para todo formalismo que pueda ser puesto en relación sistemática con los números naturales y por ello probó algo más que un resultado meramente matemático (puesto que con la fórmula de Gödel no se demuestra nada concreto en matemáticas). Por ser tan abstracto, su resultado tiene implicaciones meta-matemáticas importantes, como por ejemplo que todo programa de "reducción" de las matemáticas es fútil. Quizá un parangón aquí pueda ser útil para comprender la función del teorema de Gödel. Tomemos el campo de la economía. Hacer una inversión es hacer gastos, pagar sueldos, etc., para construir algo, digamos una fábrica. Pero considérese el capital financiero. Por medio de una computadora se mueven capitales que pasan de un banco en Hong-Kong a uno en Nueva York. También es una inversión, sólo que en papel, en libros. Si queremos seguir hablando de inversiones podemos hacerlo, sólo que es claro que se trata de inversiones de una clase diferente. Lo mismo pasa con el "teorema" de Gödel y las matemáticas: si se quiere se le puede llamar a su teorema 'matemático', pero es claramente diferente de lo que normalmente es un teorema matemático. Por ejemplo, con el teorema de Gödel no se calcula nada, no se construye nada. Más que matemático, por lo tanto, el teorema de Gödel es un **teorema formal** [32] en el que se usa la aritmética. La prueba de Gödel tiene quizá algo que ver con el absurdo matemático, sólo que ello

[32] Deliberadamente no digo 'lógico', puesto que es obvio que parte de lo que quiero decir es precisamente que hay algo de ilógico tanto en la prueba como en la motivación gödelianas.

es algo sumamente difícil de dilucidar (algo que probablemente ni Gödel mismo entendía, lo cual no tiene nada de sorprendente y sucede a menudo en ciencia). Por otra parte, puede defenderse la idea de que la comprensión cabal del resultado de Gödel exige que se le ponga en relación con otros resultados que le son de alguna manera afines. En verdad, parecería que para comprender el teorema de Gödel es menester comprender debidamente, *inter alia*, el trabajo de Turing y la teoría de la verdad de Tarski y ponerlos en conexión. Son resultados como esos lo que constituye el verdadero universo del teorema de Gödel y ellos no son, en el sentido más convencional, resultados matemáticos. En ellos se usan las matemáticas, pero parecerían pertenecer a un mundo formal superior. De ahí que no podremos comprender cabalmente lo que el teorema de Gödel "dice" mientras no lo veamos de manera sistemática en conexión con otros resultados con los que está internamente vinculado. La imagen a la que ello da lugar es la de un "universo" más amplio que el de las matemáticas. Lo que en todo caso sí queda claro es que Wittgenstein tenía razón al pensar que había un sentido en el que el resultado de Gödel no formaba parte de las matemáticas clásicas.

VI) *Observaciones Finales*

Wittgenstein sostenía que una demostración matemática genuina es siempre una demostración de una proposición concreta. El teorema de Gödel no es eso. Wittgenstein pensaba que en matemáticas la prosa es irrelevante. En la prueba de Gödel una proposición matemática "habla" y "afirma" algo de sí misma. En efecto, la prueba de Gödel pretende ser una demostración de una proposición abstracta que de alguna manera se refiere al todo de las proposiciones matemáticas, *i.e.*, que supuestamente "dice" algo acerca de ellas. En ese sentido es "prosa" y en la misma medida, si Wittgenstein tiene razón, no forma parte del mismo universo. Desde el *Tractatus* Wittgenstein había defendido la idea de que la auto-referencia se produce cuando una función funge también como su propio argumento. Gödel hace ver que hay juegos simbólicos en donde esta limitante no vale y que cuando se pasa del lenguaje objeto al meta-meta-lenguaje la auto-referencia es posible. ¿Refuta Gödel a Wittgenstein? Claro que no. Lo único que se puede inferir es que si lo que Wittgenstein sostiene no se aplica o no vale para el teorema de Gödel, entonces el de Gödel no es estrictamente hablando un resultado matemático, sino un resultado de (por así decirlo) otra clase y en el cual y para el cual se usan las matemáticas. Puede entonces afirmarse que de alguna manera, sólo indirectamente, por exclusión quizá, Wittgenstein da cuenta de la labor de Gödel, y lo hace mejor inclusive que quienes se declaran los partidarios de este último, los cuales en la gran mayoría de las ocasiones no saben hacer otra cosa que ensalzar la hazaña formal de Gödel. Pero ciertamente ensalzar no es comprender ni es saber explicar. De lo que estamos en espera, por consiguiente, es de la filosofía post-wittgensteiniana de los nuevos formalismos, esto es, de aquella filosofía que representaría un genuino avance, una expansión de la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein, y que permitiría dar cuenta de resultados como los de Gödel. Si lo que en general Wittgenstein afirma sobre las matemáticas no se aplicara al teorema de Gödel frente a lo que estaríamos sería no frente a una refutación de sus puntos de vista, sino a una clara indicación de que se alcanzó un límite en el desarrollo de cierta área del pensamiento humano. En dónde esté el genio que articulará para nosotros la nueva filosofía del formalismo es, sin embargo, algo tan enigmático e insondable como lo es aún en nuestros días el teorema que nos llevó a escribir estas líneas.