Aporías, antinomias y el infinito: la crítica de Russell a Zenón y Kant

Hay toda una serie de “puzzles” filosóficos, nunca resueltos de modo satisfactorio y definitivo, que parecen girar de manera crucial o decisiva en torno a la noción de infinito. Como el Ave Fénix, cada vez que se ha mostrado que una determinada propuesta para resolver las dificultades ha fracasado, de inmediato resurge la esperanza de que con los nuevos avances de la investigación empírica o formal se podrá al fin atrapar la escurridiza solución que hasta entonces no ha resultado ser otra cosa que un mero espejismo. Por mi parte, creo que aunque la solución deseada no puede proceder únicamente de avances técnicos, hay algún sentido en el que éstos sí facilitan la gestación de nuevas intuiciones y nuevos esfuerzos de solución. El reconocimiento de esto, en conjunción con la idea de que la auténtica “solución” sólo puede brotar de la comprensión que genera la representación perspicua de la gramática profunda del simbolismo involucrado no es, sin embargo, incompatible con la idea de que a lo que en realidad dicha “solución” nos lleva es más bien a una **disolución** de la problemática misma. Con el ánimo de reforzar esta conexión entre avance técnico, comprensión y disolución, en este trabajo me propongo examinar algunos enigmas clásicos relacionados con la noción de infinito. Dado que fue el tratamiento del infinito por medio de una nueva técnica lo que permitió a Russell desarrollar una feroz crítica de algunos planteamientos clásicos, esbozar toda una teoría novedosa al respecto y declarar con relativa confianza que los problemas habían sido en principio resueltos, haré una presentación de la teoría de Russell y luego la examinaré críticamente para hacer ver que su propuesta falla y por qué falla.

Los enigmas relacionados con el concepto de infinito que nos hacen sentido como fundamental están asociados con nociones básicas y ejemplificados en problemas metafísicos de sobra conocidos. Son el cambio, el movimiento, el espacio, el tiempo, las virtudes morales, etc., las nociones en conexión con las cuales brota la noción del infinito. Nos preguntamos, por ejemplo, ¿Es el tiempo infinito? pero esto, que es una interrogante que podría dejamos boquiabiertos, no es más que otra forma de preguntar si tuvo el tiempo un principio y si tiene un fin; o bien, nos planteamos la cuestión de si una distancia finita puede estar constituida por una infinidad de puntos. Esta pregunta está conectada con otra: ¿cómo es posible que un cuerpo recorra un número infinito de posiciones en un período infinito de instantes, que a su vez constituyen una porción finita de tiempo? Quisiéramos también saber si el número de cosas que pueblan el mundo es o podría ser infinito. Asimismo, inquirimos si es posible que exista un ser infinitamente bueno, poderoso, sabio, etc. Y nótese que, en una primera instancia, atribuimos a estas preguntas un sentido claro, aunque conocemos nuestra incapacidad para responder a ellas.

Que las dificultades no son en primera instancia de orden técnico, esto es, lógico o matemático, no es, pues, algo muy difícil de poner de manifiesto. Hay casos obvios de discusiones filosóficas célebres que ejemplifican lo que digo. Las aporías de Zenón de Elea, por ejemplo, están destinadas a probar ciertas tesis metafísicas (la realidad es Una, no hay cambio, etc.), sirviéndose para ello. precisamente de la noción de serie infinita. En vista del carácter excesivamente paradójico de las conclusiones de Zenón, es natural que tanto infinitistas como finitistas estén interesados en refutarlo, pero, como intentaré hacer ver, en la medida en que ellos comparten los mismos supuestos filosóficos que Zenón, ni unos ni otros están realmente en posición de ofrecer una respuesta satisfactoria. Por su parte, Kant, en la *Crítica de la Razón Pura,* se fija como objetivo (entre muchos otros) demostrar que, en el momento en que se sucumbe a la "ilusión trascendental" *(i.e.*, cuando se cree estar hablando significativamente de realidades incondicionadas, como cuando se habla de totalidades no dadas en la experiencia y no construibles sobre la base de intuiciones y aplicando nuestros conceptos), la Razón humana incurre inevitablemente en contradicciones, por lo demás patentes. En casos así, no podemos hablar legítimamente de conocimiento. Esto es precisamente, lo que se pretende demostrar mediante las "Antinomias de la Razón Pura". Ahora bien, en todos los casos mencionados, la noción de infinito desempeña un papel crucial. Por ello, una rápida enunciación de los enigmas es quizá lo más apropiado por hacer ahora.

De los diversos argumentos ofrecidos por Zenón nosotros, por razones de espacio, sólo consideraremos dos y nos concentraremos, asimismo, únicamente en la Primera Antinomia kantiana. El primer argumento de Zenón que deseo examinar es el siguiente:

> *Si las cosas son múltiples, es necesario que sean tantas como son, y no más ni menos. Ahora bien, si son tantas como son, serán finitas en número*.
>
> *Si las cosas son múltiples, entonces serán infinitas en número, porque siempre habrá otras cosas entre ellas y de nuevo otras entre éstas. De ahí que las cosas sean infinitas en número.*[1]

El comentario de Russell respecto al argumento es, creo, pertinente. La frase 'si son tantas como son, serán finitas en número' no es, según él muy clara, "pero es obvio que asume la imposibilidad de números infinitos definidos".[2] En todo caso e independientemente de ello, el blanco de esta *reductio ad absurdum* por parte del eleata es el defensor de la pluralidad (podría ser, por ejemplo, el atomista lógico). Pospondré la discusión acerca de la validez o invalidez del argumento de Zenón para la sección II, pero ahora quisiera exponer el segundo argumento que deseo discutir. De acuerdo con Zenón, el movimiento es imposible, porque si alguien quiere desplazarse de un lugar a otro tiene primero que llegar a la mitad del camino y antes de que llegue a esa mitad tendrá que recorrer la mitad de la mitad, y así *ad infinitum.* "De tal modo que hay un número infinito de puntos en cualquier porción de espacio dada y no

---

[1] J. Burnet, *Early Greek Philosophy* (London: Adam & Charles Black, 1975, p. 316.

[2] B. Russell, *Our Knowledge of the External World* (London: Allen & Unwin, 1980), p.175.

puedes tocar uno por uno un número indefinido de ellos en un tiempo finito”.[3] Russell, como veremos, cree poder refutar formalmente a Zenón en este punto. Desde la perspectiva en la cual pretendo yo ubicarme, en cambio, tanto Russell como Zenón están equivocados, pero esto es un asunto que dejaremos para la próxima sección del trabajo. Quisiera ahora enunciar velozmente la antinomia kantiana, también considerada por Russell en su discusión acerca de la naturaleza del infinito. La enunciación misma de la antinomia en cuestión no es particularmente compleja. Lo delicado en este caso son las pruebas que Kant ofrece en favor de la Tesis y la Antítesis. Como se sabe, una antinomia es una **demostración** de que dos afirmaciones mutuamente excluyentes pueden ser probadas. Las que nos interesan en este caso son las siguientes:

> Tesis: *El mundo tiene un comienzo en el tiempo y está también limitado con respecto al espacio*.[4]
> Antítesis*: El mundo no tiene comienzo en el tiempo ni límites en el espacio; es infinito tanto en el tiempo como en el espacio*.[5]

Una vez más, los problemas son de metafísica, pero todo lo que se diga tendrá que fundarse en *alguna* concepción del infinito. Russell tiene mucho que decir en contra de Kant, aunque habría tal vez que admitir que es probable que los comentarios cáusticos que emite no están plenamente justificados por sus objeciones. Por ejemplo H. E. Allison, en su excelente libro *Kant's Trascendental Idealism,* esboza toda una línea de defensa de la posición kantiana. Si ella es exitosa o no, eso es algo que trataré de determinar en la siguiente sección. Para ello, sin embargo, será necesario exponer primero la teoría russelliana del infinito. Antes de iniciar esta segunda sección, empero, quisiera enfatizar algo dicho más arriba.

Parece evidente que, aunque podemos emplear ideas no analizadas, imágenes, intuiciones, etc., respecto al infinito, la solución (si existe) para problemas como los enunciados más arriba no puede quedar articulada por medio de estos elementos, propios más bien del sentido común. Si algún avance ha de efectuarse en este terreno, éste habrá de fundarse en avances “teóricos” que permiten manejar de modo técnico las nociones empleadas por el lego de modo vago e indeterminado. La ventaja del conocimiento de estos avances es que permite enfrentar de modo más preciso los antiguos enigmas. Es por *eso* que me parece imprescindible hacer una exposición esquemática de las ideas centrales de lo que Russell llamó la ‘teoría positiva del infinito’. Es esto, lo que procederemos a hacer ahora.

Al abordar el asunto de la naturaleza del infinito, lo primero por decir es que hay que distinguir nítidamente entre:

---

[3] J. Burnet, *op. cit.,* p. 318.
[4] I. Kant, *Critique of Pure Reason* (London: Macmillan, 1982), p. 396.
[5] I. Kant, *loc. cit.*

a) el uso que se hace de la noción, y
b) el esclarecimiento de la noción.

La utilidad de esta distinción es que permite apreciar que el hecho de que, por ejemplo en matemáticas o en teología, se hagan demostraciones o se aplique el concepto de una u otra manera, no implica que la noción sea, por lo menos sin restricciones de ningún tipo, definible, clara, coherente o inteligible. Esto no tiene nada de extraordinario. Usamos constantemente la noción de conjunto sin poseer una definición de 'conjunto' y se sabe que, sin una u otra versión de teoría de tipos, la noción resulta contradictoria. Hay también que enfatizar que el contexto en el que surge la noción de infinito no necesariamente coincide con el contexto en el que ésta es usada con mayor exactitud. En relación con el infinito, creo que si bien es cierto que el contexto en el que surgen o se plantean por vez; primera los problemas es, por así decirlo, "empírico", el contexto en el que el concepto de infinito recibe un tratamiento sistemático (formal), una más clara aplicación, etc., es el de la lógica y el de las matemáticas. Esto, empero, no quiere decir que los matemáticos sepan automáticamente de qué están hablando por el mero hecho de servirse del concepto de infinito representado, por ejemplo, como $\aleph_0$ (así como pueden no saber lo que es un número), ni tampoco está implicado que, en caso de que realmente lo supieran, la noción de infinito en otros contextos (como, por ejemplo, cuando es comprendida como "lo absoluto") quedaría *ipso facto* elucidada. Sería necesario para ello mostrar cómo se relacionan ambas nociones (por ejemplo, la noción de cardinal transfinito con la de ser infinitamente poderoso) y hacer ver de qué manera el esclarecimiento de la noción de infinito en un contexto **es** un esclarecimiento de la noción de infinito en otro. En vista de que es en el ámbito de la teoría de conjuntos en donde la noción de infinito es usada con mayor precisión, empezaremos por exponer la teoría lógica del infinito para después pasar a efectuar una revisión general de dicha noción.

Lo que Russell llamó la 'teoría positiva del infinito' no es más que la exposición filosófica de la teoría matemática de Cantor. Se trata, más específicamente, de una teoría lógica (con un componente metafísico) que, por lo menos a primera vista, armoniza con el logicismo. Como toda teoría lógica, la teoría positiva del infinito tiene conceptos primitivos y conceptos derivados, esto es, definibles con base en los primeros. De paso, cabe señalar que el hecho de que un concepto sea indefinible no implica que dicho concepto sea ininteligible. En una teoría axiomática del tipo Zermelo-Frankel, no podemos definir, por ejemplo, 'conjunto', pero puede sostenerse plausiblemente que ciertas imágenes engendradas por conceptos asociados (aglomerados, clase, colección, agregado) y, sobre todo, el uso consistente que podemos hacer de la palabra con base en los axiomas permiten "comprender" qué es un conjunto. En el caso de la teoría del infinito, la "visualización" está descartada de antemano, pero los problemas de comprensión son los mismos que los que plantean los números naturales, puesto que las nociones primitivas que se requieren para esclarecerlo son las mismas que se requieren para la definición de 'número'. Esto es obvio: para los matemáticos, el infinito *es* un número. Es, pues, con consideraciones respecto al número en general que tenemos que iniciar nuestra disquisición.

La palabra 'número' posee un grado elevado de abstracción, puesto que no se aplica directamente a individuos, sino a grupos o totalidades. Puede decirse que Sócrates y Platón son dos, pero al decir esto estamos tomando a Sócrates y a Platón colectivamente. El número es, en cierto modo, un concepto de orden superior, puesto que, en realidad, es un nombre, a saber, el nombre de la cardinalidad de una clase. El número 2, por ejemplo (o 'dos') es el nombre de la cardinalidad del conjunto de los ojos del rostro humano. En realidad, el número puede ser definido como la clase de todas las clases similares a una clase dada. Ahora bien, para hallar la cardinalidad de una clase y nombrarla necesitamos otra noción lógica, a saber, la noción de relación biunívoca. Una relación biunívoca se establece entre dos conjuntos cuando cada uno de los elementos de uno de los conjuntos (el dominio de la relación) está conectado con uno y sólo uno de los elementos del segundo conjunto (contra-dominio o dominio converso de la relación) y no hay ningún elemento en dichos conjuntos que no esté relacionado. La cardinalidad es una propiedad de una clase considerada aisladamente. El número es un mecanismo simbólico para unificar a todas las clases entre las que se puede entablar una relación biunívoca. Dichas clases son llamadas 'similares'.

Vimos que para elucidar el concepto de número tenemos que recurrir al de cardinalidad y que éste, a su vez, nos pone en relación con la noción de clase. Ahora bien, para entender lo que es una clase tenemos que apelar a la noción de función proposicional. Una función proposicional es una expresión que contiene una variable real. Los valores de la variable, cuyos nombres convierten a la expresión en un enunciado verdadero, constituyen una clase. Es ésta la clase de objetos que poseen la propiedad expresada por la función proposicional. Podemos, mediante esta noción, definir a la clase vacía. La clase vacía es la clase constituida por los valores de la función '$x \neq x$'. Esta manera de expresarse es peligrosa y puede confundir: podemos querer hacer de la clase vacía algo. Empero, si nos atenemos a las puras definiciones y nociones introducidas hasta ahora sin permitir que se nos impongan nuestras concepciones prelógicas, no hay peligro de cosificación. Puesto que ya hemos introducido la noción de clase, podemos definir a la clase unitaria como la clase cuyo único elemento es la clase vacía o, también, como la clase que resulta al satisfacer la siguiente función proposicional:

$$(x)\ [(xRy\ \&\ x'Ry) \rightarrow\ x = x']$$

El número 1 será la clase de todas las clases similares a la clase que satisface la función anterior. Teniendo el número 0 como la cardinalidad de la clase vacía y 1 como la cardinalidad de la clase unitaria, es posible definir cualquier otro número "natural". El método que permitirá hacerlo es el de inducción matemática.

Afirmé que para definir 'número' hay que recurrir a la noción de clase y para entender lo que es una clase nos vimos obligados a introducir la noción de función proposicional. Ahora bien, las clases también pueden determinarse por enumeración e inclusive, podría objetarse, es ésta la manera más natural de hablar de las clases y de aprehender la idea misma de clase. Podemos enunciar la diferencia entre estas dos maneras diciendo que si concebimos a las clases extensionalmente, esto es, por enumeración de sus elementos, las clases quedan determinadas o constituidas, en tanto que si las concebimos intensionalmente, o sea, por medio de funciones proposicionales, entonces las clases quedan definidas. Es importante observar que para el partidario del infinito actual es indispensable desechar el enfoque extensional. Esto es, precisamente, lo que Russell hace:

> *De estas dos especies de definición, la segunda es más fundamental desde el punto de vista lógico. Lo demuestran las dos consideraciones siguientes: 1) que la definición extensional puede reducirse siempre a una definición intensional; 2) que, con frecuencia, esta última no puede reducirse a una definición extensional ni aun teóricamente.*[6]

Es evidente que Russell está recurriendo aquí a una noción de definición que es *ad hoc* y cuestionable en grado sumo, pero sobre esto nos pronunciaremos posteriormente. Por ahora, nótese que, habiendo aceptado la noción de número, noción que puede ser introducida sirviéndose únicamente de nociones lógicas como las de función proposicional y la de relación biunívoca, Russell pasa a caracterizar al número infinito apelando a sus propiedades esenciales, entendidas éstas desde el punto de vista logicista. Las propiedades de lo infinito varían en función de lo que sea aquello a lo que se aplica el adjetivo 'infinito'. A grandes rasgos, dos "cosas" pueden ser infinitas (en matemáticas):

a) un número
b) una clase.

Una clase es definida como infinita si tiene un subconjunto propio tal que puede establecerse entre ella y dicho subconjunto una relación biunívoca. El ejemplo más sencillo lo proporciona el conjunto de los números naturales. Los números naturales forman una serie, es decir, son un conjunto ordenado por una relación de tal manera que puede decidirse de cualquiera de ellos, con excepción del cero, si está inmediatamente antes o después que otro. Asimismo, el conjunto de los números pares forma una serie. Ahora bien, entre estos dos conjuntos puede establecerse una relación biunívoca, como lo muestra el siguiente diagrama:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...n,
2, 4, 6, 8, 10, 12,..., 2n,

[6] B. Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy* (London: Allen & Unwin, 1970), p. 12.

Es evidente que el conjunto de los números pares está incluido propiamente en el conjunto de los números naturales. Tenemos, pues, la prueba (de acuerdo con la definición) de que el conjunto o clase de los números naturales es infinito.

Además de las clases, los números pueden ser infinitos (o transfinitos). Dos son las propiedades de los números transfinitos: no-inductividad e irreflexividad. Un número es inductivo si tiene todas las propiedades hereditarias poseídas por 0 y una propiedad es hereditaria si acontece que dado que un número cualquiera tiene la propiedad, entonces el número siguiente la tiene. Un número es reflexivo si no se modifica porque se le aumente 1. Es evidente que los números naturales son inductivos y no-reflexivos. Los números transfinitos son, en cambio, no-inductivos y reflexivos.

Podría tal vez desearse objetar que si no podemos identificar a los números infinitos en función de los números naturales, entonces no podemos identificarlos en lo absoluto y no podemos entonces distinguir entre dos números infinitos diferentes. Pero Russell tiene ya preparada la respuesta logicista: "Los números infinitos", nos dice, "no pueden expresarse, como los finitos, por medio del sistema decimal, pero pueden distinguirse por medio de las clases a las que se aplican".[7] Con esto tenemos el núcleo elemental de la teoría cantoriana del infinito. En *Los Principios de las Matemáticas,* Russell hace no sólo lo que tal vez sea la presentación clásica de la doctrina, a la que integra en su sistema, sino que también explica lo que son los cardinales transfinitos, aclara lo que son los ordinales transfinitos, define las operaciones de la aritmética transfinita e incluye todo un tratamiento estrictamente filosófico del infinito, fundado en su teoría matemática del infinito. Es esto, justamente, lo que le permitirá polemizar con Zenón y Kant. Enfrentémonos ahora a dicha polémica.

- II -

Consideremos primero el argumento de Zenón en contra de la pluralidad de las cosas del mundo. Es sabido que muchos de los problemas metafísicos de los griegos surgieron a raíz de avances en el terreno de las matemáticas. En verdad no tiene nada de sorprendente que ocurran trastornos metafísicos si se sostiene, como por ejemplo lo hicieron los pitagóricos, que los números estaban en las cosas (puesto que a éstas se les podía contar) y luego se topa uno con los números irracionales *(e g.*, π). Es claro que hay aquí un fuerte conflicto de intuiciones: las cosas no son indeterminadas ni se expanden sin fin, como sucede con π y, por otra parte, π es, en algún sentido, una realidad. La solución no puede por lo tanto consistir, si no queremos desprendemos de ninguna de nuestras premisas, más que en hacer ver que en el fondo no hay muchas cosas y que el mundo es una unidad indivisible. De este modo, todo queda integrado y unificado. Esto es, precisamente, lo que Zenón se propone lograr. Russell, quien abiertamente toma

[7] B. Russell, *The Principles of Mathematics* (New York: W. W. Norton & Co.), § 338.

partido por el infinitista, declara del supuesto de Zenón de que no puede haber un número infinito determinado que "ahora se sabe que es falso".[8] Pero preguntémonos: ¿por qué sería falsa la tesis de Zenón? y, sobre todo ¿cómo puede Russell defender la tesis contraria siendo él un logicista? Recuérdese que, de acuerdo con él, el número es una propiedad de las clases y, de acuerdo con el enfoque general prescrito por la Teoría de los Tipos, la existencia de las propiedades presupone la de los objetos que las poseen. Luego es lógicamente anterior a la pregunta por la existencia de los números la pregunta por la existencia de las clases. Frente al problema de la existencia de las clases, Russell mantiene una posición radical, justificada en parte por la Teoría de las Descripciones. Su teoría es conocida como la "no-class theory". Russell sostiene que todo lo que se afirma utilizando expresiones de clase (inclusive cuando se cuantifica sobre ellas) puede reformularse sin utilizar dichas expresiones y, apelando a una especial teoría del significado (cuyo origen lo constituye la navaja de Ockham) concluye que no hay "compromisos ontológicos" en relación con las clases. Esto podrá o no ser cierto, pero en todo caso se aplica, si vale, no sólo a las clases sino también a los números y, *a fortiori,* a los números transfinitos. Luego no es fácil entender cómo puede Russell querer conciliar la tesis logicista con la de la realidad del infinito. Pero dejemos de lado por el momento la posible incoherencia de Russell y concentrémonos en el tema propiamente dicho.

Podría sostenerse que la idea que Russell tiene en mente es en el fondo bastante simple. Esta parece ser que puesto que se puede ofrecer un tratamiento homogéneo para los números naturales y para los transfinitos y dado que los primeros son perfectamente definidos, no hay razón alguna para negarles el mismo *status* de "números determinados" a los números infinitos. Pero esto, si bien es interesante porque apunta a semejanzas, es también equívoco, porque tiende a ocultar desemejanzas y a cerramos los ojos ante múltiples diferencias que pueden resultar esenciales. Para entender esto, creo que no estarían de más unas cuantas palabras con relación a lo que podríamos llamar nuestra comprensión 'primitiva' o 'normal' de los números.

Aceptemos con el logicista que cuando decimos, por ejemplo, que el número 3 existe, lo que decimos es que podemos formar colecciones de lo que llamamos 'tres elementos', esto es, agrupar objetos de tal manera que quede satisfecha la siguiente función:

$$(y)\ [(xRy\ \&\ (x'Ry\ \&\ x''\ Ry)] \rightarrow (z)\ [(zRy \rightarrow ((y = \mathrm{x} \vee \mathrm{z} = \mathrm{x}') \vee \mathrm{z} = \mathrm{x}''))]]$$

La posibilidad de esta representación simbólica es muy útil y sugerente, pero no debería hacemos perder de vista que la idea de tres surgió en simbiosis no sólo con la idea de clases o conjuntos, sino también con la idea de enumerar, de contar. La clase, y esto es muy importante, no es, no puede ser algo más, diferente de los tres elementos. La clase resulta más bien de nuestra forma de unificarlos y de concebir "la unidad dentro de

[8] B. Russell, *Our Knowledge of the External World*, p. 175.

la pluralidad". Un fenómeno similar debe tener lugar con lo que nosotros conocemos como los primeros números ordinales: aunque se puede dar una definición estricta y meramente lógica, la noción de número ordinal tuvo que haber brotado en conexión con actividades de ordenamiento, de series ordenadas **por nosotros** con algún fin particular en mente. Pero entonces no está claro cómo y por qué la mera manipulación simbólica bastaría para desligar conceptualmente a la noción de número ordinal de la de experiencia o actividad humana. Independientemente de ello, el punto importante es que el concepto usual de número (la "cardinalidad de una clase") aparece como ligado a y dependiente de la experiencia y, también, que es en algún sentido producto de nuestro aparato cognitivo. Los mitos filosóficos en torno al número se crean en el momento en que caemos en la cuenta de que, aparentemente por lo menos, se puede "jugar" con ellos independientemente de toda utilización real. El número se vuelve, así, autónomo y adquiere con ello ciudadanía ontológica. Pero adviértase que ello se logra sólo por hacer caso omiso de ciertas relaciones conceptuales entre "número" y, *e.g.*, "contar".

En segundo lugar, obsérvese que, en su esfuerzo por introducir **como números** los números infinitos, el logicista tiene que desligar al concepto de número no sólo de la noción de contar, sino también de otras desde siempre (esto es, desde la gestación del concepto) asociadas con él, como las de tamaño y de magnitud. No podemos, como en el caso de conjuntos finitos, enumerar los elementos de un conjunto infinitamente denumerable (por definición) y, no obstante, se sostiene que sigue valiendo en ambos casos la misma noción de cardinalidad que se emplea para referirse a conjuntos denumerables. La diferencia en cuestión, sin embargo, no es desdeñable. Por otra parte, nótese que no se aplican a los números transfinitos las categorías que se aplican a los números naturales, como la noción "mayor que" (y nociones derivadas). En el conjunto de los números naturales, es verdad que

$$(n)\ n < n + 1$$

Sin embargo, no sucede así en el caso de los números infinitos, puesto que son reflexivos. Y no es eso todo, ni creo que pueda decirse que los cambios sean meramente lingüísticos o terminológicos, pues son todas las operaciones aritméticas que tienen que ser re definidas, ya que:

$$\aleph - n = \aleph$$
$$\aleph \cdot n = \aleph$$
$$\aleph^{\aleph} = \aleph$$

donde n es un número inductivo cualquiera. Esto, obviamente, es contradictorio con lo que sucede con los números naturales. Pero esto permite entonces sostener que '+', '−', '·', etc., no tienen el mismo significado (no son usados de la misma manera) cuando la operación es efectuada en el dominio de los números naturales que cuando es realizada en el contexto de los "números transfinitos". Luego hay bases para pensar que, después de todo, números naturales y números transfinitos no pertenecen a la misma categoría de "entidades".

Es obvio que en el dominio de los números naturales hay números muy diferentes entre sí (unos son par otros impar, *e.g.*), pero, independientemente de ello y de su magnitud, todos son (en principio) construibles. Todo número natural es, como ya se dijo, un número inductivo, y es esta propiedad la que permite mantener el contacto con lo que podríamos llamar la 'experiencia aritmética'. En principio, podemos llegar paso a paso a cualquier número natural, por grande que sea. La situación es semejante a la que habría entre palabras definidas por ostensión y palabras que requieren ser definidas por medio de otras. De todos modos, seguiríamos diciendo que también estas últimas son palabras con contenido empírico, si bien este carácter no se nos revela de inmediato. Igualmente, es el carácter inductivo de los números lo que nos autoriza a hablar de cualquier número natural como de un genuino número y, por inmenso que sea, ligado de alguna manera a la experiencia.

Ahora bien, esta vinculación con la experiencia (y la significatividad) está, por principio, cancelada en el caso de los números transfinitos. Lo que se supone que es un número transfinito no mantiene ninguna conexión con la experiencia. Es no sólo sicológica sino lógicamente imposible imaginarlo o concebirlo (por más que simbólicamente sea manejable). Los números naturales forman una serie y dicha serie no tiene fin. El primer número transfinito sería la cardinalidad de dicha serie. Dicho número (en caso de que hubiera tal cosa) tendría que ser un número de segundo grado. Mediante esto quiero decir que se trata de un número que no pertenece a la serie, pero ¿cómo es posible que haya algo que está **más allá** de una serie **sin límite**? Esto es lo que Russell explícitamente afirma: "El primer número infinito está, de hecho, más allá de la serie sin fin de los números finitos",[9] pero considera al mismo tiempo que esto no tiene nada de extraordinario. Después de todo, el número 1 está "más allá" de la serie de fracciones que están entre 0 y 1 y el número de las fracciones es infinito. Esto, no obstante, supone, como Lazerowitz ha hecho ver, que series infinitas **pueden** formar un todo. Pero "Puesto que lo que se cuestiona es la posibilidad de que una serie infinita forme un todo, resulta que Russell incurre en una petición de principio".[10] Esta objeción, que me parece estar bien fundada, implica que no es inteligible o significativo hablar de un número que está más allá de todo número posible. En otras palabras, lo que la observación de Lazerowitz indica es que $\aleph_0$ no es un número, ni especial ni no especial.

Hemos visto que 'todo', 'parte', 'número','conjunto', 'suma', etc. significan de hecho cosas distintas si hablamos de lo finito que si hablamos de lo infinito. Lo mismo sucede con 'serie'. Para un partidario del infinito actual, una serie infinita está ya dada.

---

[9] B. Russell, *ibid.,* p. 186.

[10] M. Lazerowitz, "The Infinite", en G. W. Roberts (ed.) *Bertrand Russell/ Memorial Volume* (London: Allen & Unwin, 1979), p. 231.

Se supone que dicha serie forma una totalidad a la cual pertenecen todos los términos que pueden mencionarse (construirse) y a los cuales no pertenece el número infinito. Dicho "número" está más allá de la serie, a pesar de que la serie no tiene un último término. Pero esto ahora acarrea problemas con la noción de cardinalidad. 0 no puede ser la cardinalidad de la clase de los números naturales **en el mismo sentido** en el que se habla de la cardinalidad de una clase finita, porque en este último caso si la clase tiene *n* miembros su cardinalidad es $n + 1$, pero $n + 1$ puede ser nombrado. Pero si una clase infinita tiene como cardinalidad, digamos, $\aleph_0$, $\aleph_0$ no pertenece a la clase, puesto que entonces $\aleph_0$ sería un número finito más. Hay, pues, un cambio en el uso de "cardinalidad". Lo mismo sucede con 'todo', 'totalidad', 'parte', etc. Un todo no acabado, no consumido o, tomando una expresión de Frege, "no saturado", no es un todo en el mismo sentido en que lo es un todo finito. A mí me parece que tiene sentido decir de una totalidad que es real cuando están dados sus elementos, en el sentido extensionalista de las clases. En casos así, la totalidad conformada, considerada como un elemento, puede ser concebida como una "entidad" de tipo superior. Pero la serie, *e.g*., de los números naturales no tiene un número final (o sea, no hay número natural máximo). Esto permite sospechar que la totalidad de los números naturales **no** está dada, y si no está dada, entonces, dicha totalidad no es real, en el sentido relevante, *i.e*., no hay tal totalidad. Y no creo que sea mayormente útil, y en cambio sí confunde, afirmar que por medio meramente de "definiciones" podemos, también, tener totalidades tan reales como en el otro caso.

En relación con las clases sucede lo mismo. Hay, por ejemplo, un principio que podemos calificar de 'auto-evidente' (si es que hay principios así en lo absoluto), a saber, el principio según el cual el todo es mayor que sus partes. Ahora bien, este principio es rechazado por el partidario del infinito actual, y el argumento que se aduce es que dicho principio es evidente y verdadero sólo cuando se aplica a conjuntos finitos, pero que pierde validez, precisamente en el caso de las clases infinitas. Una vez más, lo menos que debería admitirse es que se ha operado un cambio, por mínimo que sea, en el significado de palabras como 'todo', y 'parte'. Ahora bien, no nos interesa simplemente registrar cambios, sino extraer sus consecuencias y en este caso no se trata de una observación inocua, sino que plantea (si es acertada) un problema real. La razón de ello es simple: nosotros aprendimos a usar el concepto de número junto con otras categorías, las cuales conformaban un universo en el que ciertos principios y leyes valían. Ahora se nos cambia bruscamente el contexto, se nos hace ver que ninguna de las categorías "tradicionales" tiene aplicación en este nuevo reino de las matemáticas, se modifican leyes fundamentales y, al mismo tiempo, se insiste en que se sigue hablando de lo mismo (números, clases, etc.). Lo menos que se debería admitir es que no es evidente de suyo que la posición del infinitista sea incuestionable. A este respecto, creo que el comentario de M. Lazerowitz es pertinente: "No se pone en tela de juicio ningún enunciado o demostración matemáticos"[11] y no estará de más reconocer que el desacuerdo que pueda

[11] M. Lazerowitz, *ibid.*, p. 236.

surgir "No es el resultado de un conocimiento incompleto por parte de nadie".[12] El uso técnico del simbolismo no garantiza la comprensión de lo que se supone que se está haciendo cuando se le emplea, al igual que el manejo del lenguaje no asegura que los usuarios saben lo que es el significado de una palabra o lo que sea una palabra (un signo, una clase de emisiones, un universal, etc.). De igual modo, y siguiendo en esto a Wittgenstein, creo que puede afirmarse que la discusión filosófica en torno al infinito (y en torno a lo que sea) no altera ni interfiere con la labor matemática (o con la labor en cualquier otro dominio). Lo que aquí está en cuestión es la comprensión (interpretación) de la naturaleza de lo "referido" por signos como '$\aleph_0$' y que tienen un uso y una aplicación estrictos en matemáticas. Y frente a lo que es un hecho neutro, como el uso de ciertos. signos, lo único que no se puede hacer es dogmáticamente negar *a priori* que diversas interpretaciones son posibles.

Todo esto sugiere otro modo de comprender el infinito. En primer lugar, suponiendo *per impossibile* que podemos contemplar la serie de los números naturales, no está en lo más mínimo claro por qué $\aleph_0$, esto es, aquello que está "más allá" de la serie y no forma parte de ella, haya de ser también un número. Una interpretación alternativa es que aquí nos las habemos más bien con una "entidad" de otro tipo, lo cual equivale a decir (de acuerdo con la doctrina de que el significado es sistemáticamente ambiguo) de otra naturaleza. Lo que sucede es que se marca dicha "entidad" (por llamarla de algún modo, puesto que por definición se trata de algo no completo o consumado) con un símbolo y se le trata **como si** fuera una totalidad acabada (como la serie de los números naturales). Lo que se ha producido es una transición imperceptible de un lenguaje objeto hacia un metalenguaje, lo cual produce la creencia (ilusoria) de que se sigue hablando de lo mismo o, por lo menos, del mismo tipo de cosas (números, clases, etc.). Pero lo que sucede es que se ha efectuado un cambio en las nociones mismas que no se refleja en el lenguaje debido a que se persiste en usar las mismas palabras. De hecho, se pasa (como dije) de un lenguaje objeto a reflexiones sobre éste, reflexiones expresadas en el mismo simbolismo. El cálculo de totalidades semejantes a la de los números naturales ya no es aritmética: es una meta-teoría semántica cuyo objetivo es poner de relieve, en el lenguaje matemático, la lógica de ciertas nociones como "serie a la cual es imposible señalar un último término" y a la que por ello se califica de 'infinita'.

Creo que ahora sí estamos en posición de examinar la polémica "Russell-Zenón". Si la objeción de Russell es que se puede demostrar que los números infinitos son tan definidos como los finitos, la respuesta es que la uniformización logicista aquí es equívoca y perturbadora y que. no se ha demostrado que haya *números* infinitos. Russell, de la impresión, se esconde tras las definiciones logicistas, pero cabría preguntarle: ¿qué sería que el mundo efectivamente contuviera un número infinito de cosas, aparte del hecho de que esto no significara que **nosotros**, dado que no somos omniscientes,

[12] M. Lazerowitz. *ibid.*, p. 226.

podríamos estar permanentemente descubriendo cosas nuevas? Pero ¿qué **sería** que el número de cosas del mundo **fuera** infinito? ¿Qué clase de cantidad es esa? ¿Para qué nos serviría, desde un punto de vista cognoscitivo, una respuesta así? ¿Qué diferencia habría para nosotros el que se respondiera diciendo que el número de objetos es $\aleph_0$, o diciendo que el número de objetos es más bien 2? Sobre estos que son asuntos centrales implicados para cualquier posición, Russell no dice absolutamente nada.

El que la objeción de Russell no resulte convincente no quiere decir, naturalmente, que la argumentación de Zenón sea correcta. Por lo pronto, notamos una equivocación: la primera parte de la aporía es un argumento enteramente *a priori*, en tanto que la segunda es más bien una hipótesis factual: el que haya siempre cosas intermedias entre otras o no es un hecho empírico y parecería más bien que lo que Zenón afirma es falso. Si suponemos que de hecho es falso, la aporía desaparece: el número de cosas del mundo es, en el sentido de Zenón (tal vez el único sentido que podemos comprender), determinado.

Consideremos brevemente el famoso argumento de Aquiles. Russell sostiene que podemos pasar del O al 1 habiendo *recorrido* una infinidad de números reales, ya que no se requiere para ello haberlos enumerado uno por uno. Russell infiere, como era de esperarse, que Zenón está en un error al afirmar que no se puede recorrer un número infinito de puntos que formen una distancia finita en un tiempo finito. Pero ¿qué noción de recorrer está siendo aquí utilizada por Russell? Desde luego que no la usual. En mi opinión, es sólo desde la perspectiva de una concepción "platónico objetivista-fregeano-realista" que podría sostenerse algo así, pero esta **no** es la posición de Russell. Con una visión constructivista de las matemáticas, la idea de "recorrido ni siquiera tiene sentido". De ahí que la refutación de Russell parezca descansar en una analogía mal aplicada. Por su parte, Zenón, quien (como bien señala Russell) parece querer demostrar que ni el espacio se compone de puntos ni el tiempo de instantes, supone lo contrario en aras de efectuar su reducción al absurdo, pero no explica cómo es posible que la suma de un número infinito de elementos pueda tener como resultado una longitud finita (Nótese que la aporía concierne tanto al espacio como al tiempo, por lo que es preciso extraer la conclusión correspondiente). Pero la posición de Russell tampoco está exenta de problemas. Él, por ejemplo, acepta las premisas de la argumentación de Zenón al tiempo que niega la conclusión pero, aparte de que por ello mismo se le presentan idénticas complicaciones que a Zenón, él se tiene que enfrentar a los problemas mencionados más arriba y derivados de su logicismo (podríamos decir, tal vez, de su "clasismo"). De ahí que su posición sea inclusive menos satisfactoria. En vista de que Zenón y Russell ocupan posiciones diametralmente opuestas, y ambos se ven envueltos en problemas insolubles, yo sería de la opinión de que lo que habría que defender es la idea de que la "solución" sólo puede proceder de una "picture" completamente diferente de las matemáticas, puesto que tanto anti-pluralistas (como Zenón) como infinitistas (como Russell) comparten los mismos prejuicios. A mi modo de ver, para quien acepta el enfoque tradicional no hay salida ni paradójica ni no paradójica. Yo estoy convencido de que, aceptada la discusión como válida, esto es, asumiendo que no tiene supuestos no hechos explícitos inaceptables, habría que reconocer que Zenón demuestra que no hay cambio y que Russell demuestra que se puede recorrer un número infinito de posiciones en un tiempo finito. En realidad, ambas conclusiones son inaceptables, pero la raíz u origen de su carácter inaceptable reside en la concepción general de las matemáticas y el lenguaje que les subyace. Antes de decir una cuantas palabras al respecto, quisiera considerar brevemente la discusión "Russell-Kant",

Según Russell, algo debe estar radicalmente mal en la teoría kantiana, puesto que Kant "profesa probar ambas proposiciones, en tanto que, si lo que se ha dicho en lógica moderna tiene algún viso de verdad, debe ser imposible probar cualquiera de ellas".[13] Son dos las objeciones que Russell eleva en contra de Kant (en relación con la Primera Antinomia). La primera es que "es un error definir la infinitud de una serie como 'imposibilidad de ser completada por medio de síntesis sucesivas'".[14] Es esta caracterización lo que le sirve a Kant para probar que es imposible que el mundo no tenga un comienzo. La objeción de Russell consiste en decir que la caracterización kantiana del infinito es subjetiva y, por ello, completamente irrelevante e inservible: "las clases que son infinitas están dadas de inmediato por la propiedad definitoria de sus miembros, de modo que no se trata de 'ser completada' o de 'síntesis sucesivas'",[15] Una vez más, estamos en terrenos resbaladizos. Russell habla aquí de totalidades infinitas *dadas,* pero de seguro que esto no puede ser entendido literalmente. De nuevo Russell está recurriendo a una metáfora a la que luego toma literalmente. Por otra parte, es claro que está aquí operando su concepción intensionalista de las clases y, lo cual es más relevante todavía para nosotros, su concepción de la definición. El opta por la definición intensional por las razones citadas más arriba, pero éstas están lejos de ser concluyentes. El segundo argumento de Russell sencillamente refleja la decisión de hablar de la teoría del infinito como de una teoría más sobre números, pero es justamente esta decisión lo que se suponía que estaba en juego. El primer argumento tampoco es muy claro. Supongamos que se tiene el siguiente conjunto *C* (Caos) = {Kant, 8, * 'diluvio', verde}. ¿Qué definición, que no sea la trivial consistente en decir que *C* es el conjunto de los objetos que satisfacen la función '$x \in C$', puede darse? Ninguna, por la sencilla razón de que los elementos de *C* no tienen absolutamente nada en común (no constituyen, ***e.g.***, ninguna clase natural). Es, pues, sobre la base de una teoría bastante extraña de la definición que Russell opta por el enfoque intensional. Sólo así puede él afirmar que una definición nos puede **dar** un conjunto infinito. Es claro que 'dar' en este caso no está siendo empleado literalmente, esto es, como sí lo podría usar el extensionalista. Por consiguiente, no se ve que el dardo de Russell haya dado efectivamente en el blanco.

El segundo argumento de Russell consiste en decir que lo único que Kant tiene

[13] B. Russell, *Our Knowledge of the External World*, p. 160.
[14] B. Russell, *ibid.*, p. 160.
[15] B. Russell, *loc. cit.*

derecho a afirmar es que la serie infinita "no puede ser completada *en un tiempo finito.* Así, lo que realmente él prueba es, a lo sumo, que si el mundo no tuviera un comienzo, debe haber existido ya durante un tiempo infinito".[16] Esto, claro está, es una muy útil tautología, por lo que si Russell tiene razón realmente habría muy poco que decir en favor del planteamiento kantiano.

Un especialista en Kant que ha tratado de defender a este último de la crítica de Russell es Allison. En verdad, pienso que su defensa es, aunque interesante, insuficiente. Él sostiene que se puede considerar el concepto matemático de infinito como una versión esquematizada del concepto trascendental, antes que como un concepto distinto. Contiene una referencia específica al número, el esquema de la cantidad (*A142/B182*) y expresa en términos numéricos lo que el concepto 'trascendental' o 'puro' expresa en términos estrictamente conceptuales, a saber, el pensamiento de la incompletabilidad o inexhaustibilidad del proceso enumerativo",[17] Pero es claro que esto **no** es una respuesta a Russell, quien justamente se esfuerza por hacer evidente que los dos planos (el "mental" y el matemático) son lógicamente independientes. La reconstrucción del "error elemental" de Kant que Russell nos ofrece es, pienso, contundente. Russell muestra, sin que quepan dudas, que Kant confundió el orden de la síntesis, que va hacia atrás, con el orden físico, que llega hasta hoy, y, por lo tanto, confundió dos series infinitas diferentes, una que tiene fin, más no principio (la de los acontecimientos del mundo) y otra que tiene principio, pero no fin (el de la "síntesis" "subjetivas"). En este caso, el señalamiento de un error es inobjetable y la crítica de Russell realmente demoledora.

Russell eficazmente bloquea la antinomia kantiana, pero a costa de cometer una y otra vez el error de usar, de modo uniforme signos con lógicas distintas. Por ejemplo, él afirma que

> *así como una clase puede ser dada de inmediato por su concepto definitorio, aunque no puede ser alcanzada por enumeración sucesiva, así también puede darse de inmediato un conjunto infinito de puntos como constituyendo una línea, un área, un volumen, a pesar de que nunca pueden ser alcanzados mediante un proceso de división sucesiva.*[18]

Creo que se ha dicho ya lo suficiente para detectar las dificultades a las que un enfoque así da lugar. Concluyo, pues, que aunque la crítica de Russell a Kant es efectiva, la propuesta del primero sigue siendo inaceptable.

---

[16] B. Russell, *ibid.,* p. 161.
[17] H. E. Allison, *Kant's Transcendental Idealism. An Interpretation and Defense* (New Haven/Londres: Yale University Press, 1983), p. 42.
[18] B. Russell, *Our Knowledge of the External World*, p. 163.

Aunque supongo que, con base en lo dicho hasta aquí, ya habrá quedado relativamente claro qué características generales tiene el enfoque que favorezco, quisiera completar el cuadro con algunas consideraciones suplementarias. Es obvio que los problemas filosóficos se inician con las exposiciones mismas de los asuntos de que se trate. Cualquier presentación nos compromete con una determinada visión del tema y luego es imposible escapar a las dificultades. Mi diagnóstico general de la controversia entre Russell y Zenón (no examinada completamente y a fondo en este trabajo) es que-hay, tanto en la argumentación de Zenón como en la discusión de Russell, una falacia y un "error". La falacia consiste en hablar de cosas distintas (*grosso modo,* lenguaje y realidad), como si fueran una y la misma cosa y, por lo tanto, en predicar de la realidad lo que sólo puede predicarse de un sistema de signos, reglas, etc. Esto puede ser ilustrado fácilmente: el sistema métrico, por ejemplo, permite de alguna manera "medir" a la realidad o, si se prefiere, contribuye a que nos la representemos, pero es un error pensar que todo lo que se pueda decir del sistema de medición se puede decir de lo representado. Nuestra realidad es decimal o métrica porque recurrimos a esos sistemas, pero otros sistemas eran también posibles y fue por razones extra-teóricas que el que conocemos y utilizamos fue poco a poco implantándose. El reconocimiento de esto debería bastar para evitar el verbalismo. El error, en cambio, consiste en malinterpretar una disciplina formal, como las matemáticas, describiéndola como si en ella se hablara de algo que acontece en la realidad y como si versara sobre misteriosos objetos que paulatinamente descubrimos. De acuerdo con Russell, el infinito "está allí", sólo que es inaccesible a nosotros. Es gracias a las matemáticas, que se convierte en una especie de geografía abstracta del mundo, que algo podemos llegar a saber acerca de él. Esto es, en mi opinión, un modo inútil y un tanto oscurantista de hablar. Desde el punto de vista que intento promover, en cambio, hablar de, *e.g.,* divisibilidad al infinito (en el espacio o en el tiempo) es hacer alusión a la posibilidad, inscrita en el carácter re cursivo de las reglas, de efectuar una misma operación (en el papel) las veces que se quiera. Hablar del infinito matemático (en geometría, en aritmética, en cálculo, etc.) es introducir un nuevo juego de lenguaje cuya gramática no es transparente y que no es similar más que en apariencia a otros juegos de lenguaje que ya conocemos. La auténtica solución, por lo tanto, consiste en evitar a toda costa hacer de la gramática superficial (sea lingüística o lógica) nuestro guía para la exploración filosófica. Desde esta perspectiva, los enigmas asociados con el infinito (aporías, paradojas, antinomias, etc.) ni siquiera ven la luz, pues se nos hace ver que éstos surgieron por una visión errada y confusa del asunto, visión engendrada por la incomprensión de la gramática profunda de ciertos términos, expresiones y aseveraciones de gramática superficial clara y gran utilidad pública.